|  |
| --- |
|  |

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH – MARKETING**

**BỘ MÔN TOÁN KHOA CƠ BẢN**

---------------🟑🖎…✍🟑---------------

|  |
| --- |
| **MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ** |
| Mathematical Economic Models |
|  |
| **Giảng viên: Th.s Nguyễn Trung Đông** |
| E-Mail: nguyentrungdong144@yahoo.com |
| **Bài tập nhóm: Nhóm 7 \_ Buổi sáng thứ 7** |
| **Mã lớp học phần : 1311101003401** |
| **Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 23/11/2013** |

**DANH SÁCH NHÓM 7**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Họ và tên** | **MSSV** | **Lớp** |
| 1. Phan Châu Thông | 1212150051 | 12DQH |
| 1. Bùi Thị Kim Loan | 1212150029 | 12DQH |
| 1. Nguyễn Thị Thanh Thương | 1212150057 | 12DQH |
| 1. Võ Thị Ngọc Thu | 1212150050 | 12DQH |
| 1. Nguyễn Thị Kim Ngọc | 1212020135 | 12DMA2 |

# Chương I:

# GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Bài 1: **Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng hóa lần lượt là**

**S(P) = 0,1P2 + 5P -10**

**D(P) =**

**Chứng tỏ luôn tồn tại giá cân bằng nằm trong khoảng (3,5)**

**Giải:**

Giá cân bằng khi:*S*(*p*) =*D*(*p*)

Đặt *f* (*p*) =*S*(*p*) -*D*(*p*) = 0,1*p2* + 5*p* -10 -

*f* (3) = 0,1.32 + 5.3 -10 - = -44,1

*f* (5) = 0,1.52 + 5.5 -10 - = 0,83

🢣 *f* (3).*f* (5) < 0

🢣 *p0*(3,5) sao cho*f* (*p*0) = 0 🢣 *S*(*p*0) =*D*(*p*0 ).

Bài 2: **Cho hàm doanh thu**

**TR(Q) = 1200Q – Q2; Q  0**

**a)** **Tìm hàm doanh thu cận biên:**

Hàm doanh thu cận biên:*MR*(*Q*) = (*TR*(*Q*))' = -2*Q* + 1200

**b)****Tại Q0 = 590, khi Q tăng lên 1 đvị thì doanh thu sẽ thay đổi bao nhiêu đvị**

*Q*0 = 590 🢣*MR*(*Q*0 ) =*MR*(590) = -2.590+1200 = 20

Vậy khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì doanh thu tăng thêm 20 đơn vị.

**c)** **Tính giá trị doanh thu biên tại *Q*0 = 610 và giải thích ý nghĩa**

*Q*0 = 610 🢣*MR*(*Q*0 ) =*MR*(610) = -2.610 +1200 = -20

Vậy khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì doanh thu giảm bớt 20 đơn vị.

Bài 3: **Cho hàm sản xuất ngắn hạn**

**Q = 30 ; L ≥ 0**

1. **Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động**

MPL = QL' = 30..L -1/2 = 15L-1/2

1. **Tại *L*0 = 144, nếu L tăng lên 1 đvị, sảnlượng sẽ thay đổi bao nhiêu đvị**

*L*0 = 144 🢣*MPL*(*L*0 ) =*MPL*(144) = 15.144-1/2 = 1,25

Vậy nếu lao động tăng thêm 1 đơn vị thì sản lượng sẽ tăng thêm 1,25 đơn vị.

Bài 4: **Cho hàm chi tiêu**

**C(Y ) = *a*Y + *b*; (0 < *a* < 1, *b* > 0); Y ≥ 0**

**a) Tìm hàm xu hướng tiêu dùng cận biên:**MCP(Y ) =C’(Y ) = *a*

**b) Ý nghĩa kinh tế của hệ số *a* là:**

khi Y tăng thêm 1 đơn vị thì chi tiêu C tăng thêm *a* đơn vị.

Bài 5 : **Cho hàm tổng chi phí**

**TC(Q) = 0,1Q2 + 0,3Q + 100, (Q ≥ 0)**

**a)** **Tìm hàm chi phí biên**: MC(Q) = TC'(Q) = 0,2Q + 0,3

**b)** **Tính chi phí biên tại mức sản lượng Q0 = 120 và giải thích ý nghĩa**

Q0 = 120 🢣 MC(Q0 ) = MC(120) = 0,2.120 + 0,3 = 24,3

Vậy tại mức Q0 = 120 , khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì chi phí tăng 24,3

đơn vị.

## Bài 6 :

**Xét hàm cầu của một loại hàng hóa D = D(P)**

1. **Lập công thức tính hệ số co dãn tại cầu tại mức giá P0**

D = D'(P0).

1. **Áp dụng với D(P) = 6P - P2 , tại P0=5 và giải thích ý nghĩa kết quả**

D = D'(P0). = (6 - 2P0). =

Tại P0 = 5

⇒D= −4

Ý nghĩa : Khi P tăng lên 1% thì sản lượng D giảm xuống 4%.

## Bài 7:

**Cho hàm sản xuất Q = aLα , (a > 0, 0 < α < 1)**

Q’ = αaLα-1

**a)** **Hệ số co dãn của sản lượng theo lao động**

εQ/L = Q’. = αaLα-1.= α

**b)** **Áp dụng cho Q = 40L0,4, tại L0 = 20**

Q = 40L0,4, tại L0 = 20 ứng với α = 0,4

Dựa vào công thức từ câu a

=> Hệ số co dãn của sản lượng theo lao động tại L0 = 20 : εQ/L = 0,4

## Bài 8:

**Cho hàm sản xuất Q = 120L2 – L3, L > 0**

**Xác định mức sử dụng lao động để sản lượng tối đa**

Q’ = 240L – 3L2

Q’= 0

Q" = -6L + 240 Q"(80) = -6.80 + 240 = -240 < 0

=> Mức sử dụng lao động để tối đa sản lượng là: L = 80

Bài 9 : **Cho hàm sản xuất Q = 30 ; L >0**

**Tại mức sử dụng lao động bất kì, nếu lao động tăng 10% thì sản lượng thay đổi bao nhiêu %**

εQ/L = (30)’.=

Kết luận: Tại mức sử dụng lao động bất kì, nếu lao động tăng 10% thì sản lượng tăng 20/3 %.

Bài 10 : **Cho hàm sản xuất biên của lao động MPL = 40L0,5 . Tìm hàm sản xuất ngắn hạn Q = f(L) biết Q(100) = 4000**

MPL = 40L0,5 => Q = f (L) = = dL = L1,5 + c

Ta có : Q(100) = + c = 4000

=> c = -

Vậy Q =

Bài 11: **Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là *MC* = 8*e*0,2*Q*  và chi phí cố định*FC* = 50. Tìm hàm tổng chi phí**

Ta có:

*TC* = ∫*MCdQ* = ∫ 8*e0,2QdQ* = 40*e*0,2*Q* +*c*

*FC* =*TC*(*Q* = 0) = 40.*e*0,2.0 +*c* = 50

⇒*c* = 10

Vậy*TC* = 40*e*0,2*Q* +10

Bài 12 : **Cho hàm doanh thu biên ở mỗi mức sản lượng Q là**

**MR(Q) = 50 – 2Q – 3Q2**

**Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm**

Ta có : MR(Q) = 50 – 2Q – 3Q2

TR = = = 50Q – Q2 – Q3 + C

TR = P.Q => P = = -Q2 – Q + 50 +

Bài 13: **Chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MC = 32 + 18Q – 12Q2  và FC = 43. Tìm hàm tổng chi phí và chi phí khả biến**

MC = 32 + 18Q – 12Q2

=> TC = = = 32Q + 9Q2 – 4Q3 + C

Mà TC(Q=0) = FC => C = 43

=> TC = -4Q3 + 9Q2 + 32Q + 43

VC = TC – FC = -4Q3 + 9Q2 + 32Q

Bài 14 : **Chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MC = 12e0,5Q**

**và FC = 36. Tìm hàm tổng chi phí**

TC = = dQ = 12. + C = 24e0,5Q + C

TC(Q=0) = FC => 24e0,5.0 + C = 36 => C = 12

Vậy TC(Q) = 24e0,5Q + 12

Bài 15 : **Doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MR = 40Q – 16e0,4Q**

**Tìm hàm tổng doanh thu**

Ta có hàm doanh thu cận biên MR = 40Q – 16e0,4Q

Mà TR = ∫ MR => TR = = 20Q2 – 40e0,4Q + C

Q = 0 => TR = 0 => C = -40

Vậy hàm tổng doanh thu TR = 20Q2 – 40e0,4Q – 40

Bài 16: **Doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MR = 84 – 4Q – Q2 Hãy tìm hàm tổng doanh thu và hàm cầu**

Ta có hàm doanh thu cận biên MR = 84 – 4Q – Q2

Mà TR = ∫ MR => TR = ∫(84 – 4Q – Q2)dQ = 84Q – 2Q2 − Q3 + C

=> P = TR/Q = 84 – 2Q − Q2 +

Vậy hàm tổng doanh thu TR(Q) = 84Q – 2Q2 − Q3 + C

Hàm cầu P = 84 – 2Q − Q2 +

Bài 17 : **Cho hàm tiêu dùng C(Y) = 0,8Y + 0,2 + 300 ; Y ≥ 0**

**a)** **Tại mức thu nhập Y0 = 169 nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dùng thay đổi như thế nào ?**

= 0,8 + (1)

Thế Y0 = 169 vào (1) ta được ≈ 0,81

Vậy nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dùng tăng 0,81 đơn vị

**b)** **Tính MPC(Y) tại Y0 = 144 và giải thích ý nghĩa kết quả nhận đc**

Tương tự câu a, thế Y0 = 144 vào (1) ta được ≈ 0,81

Ý nghĩa: Nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dung tăng 0,81 đơn vị

Bài 18 : **Cho các hàm cầu Q1 = 40 - P1;Q2 = 30 - 0.5 P2**

**Hãy lập hàm doanh thu**

Q1 = 40 - P1 => P1= 40 - Q1

Q2 = 30 - 0.5 P2 => P2= 60 - 2Q2

TR(Q) = P1Q1 + P2Q2

= (40 - Q1)Q1 + (60 - 2Q2)Q2

= - - 2 + 40Q1 + 60Q2

Bài 19 : **Cho hàm sản xuất Q = 10K0.3L0.4 . Giá thuê một đơn vị K bằng 3$, giá thuê 1 đơn vị L bằng 2$ và giá sản phẩm là P = 4. Hãy lập hàm lợi nhuận π(K,L)**

Tổng chi phí: TC= 3K + 2L

Doanh thu: TR= PQ = 40K0.3L0.4

Lợi nhuận: π = TR – TC = 40K0.3L0.4 – 3K - 2L

Bài 20 : **Cho hàm sản xuất Q = 20K1/4L3/4 .**

**Hãy tìm sản lượng cận biên tại K = 16, L = 81. Giải thích ý nghĩa**

= 5K-0.75L3/4

= 15K1/4L-1/4

Với K = 16, L = 81

=> = 5K-0.75L3/4 = 16.875

= 15K1/4L-1/4 = 10

Ý nghĩa:

+ Khi vốn tăng 1 đơn vị thì sản lượng tăng 16.875 đơn vị

+ Khi lao động tăng 1 đơn vị thì sản lượng tăng 10 đơn vị

Bài 21 : **Cho hàm hữu dụng TU(x1;x2) = 2..**

**Hãy tính lợi ích cận biên của hàng hóa 1, 2 tại mức tiêu dùng tương ứng 64 và 25. Giải thích ý nghĩa**

Ta có :

(x1;x2) = ’(x1;x2) = (x1;x2) =

=> (64;25) = ’(64;25) = (64;25) =

Ý nghĩa :

Tại x1 = 64, x2 = 25 nếu tăng thêm 1 đơn vị x và y không đổi, thì lợi ích sẽ

tăng đơn vị.

(x1;x2) = ’(x1;x2) = (x1;x2) =

=> (64;25) = ’(64;25) = (64;25) =

Ý nghĩa :

Tại x1 = 64, x2 = 25 nếu tăng thêm 1 đơn vị x và y không đổi, thì lợi ích sẽ

tăng đơn vị.

Bài 22 : **Cho hàm cầu : D = 0,4.Y0,2.P-0,3. Hãy tính εD/Y và εD/P**

a) εD/Y = D’Y.

= 0,4.0,2.Y-0,8.P-0,3. = 0,2

b) εD/P = D’Y.

= -0,4.0,3.Y0,2.P-1,3. = - 0,3

## Bài 23 :

**Tính hệ số co dãn của các hàm sau tại điểm cho trước**

**a) Q(P1;P2) = 6300 - 2 - tại (20;30)**

= . = -4P1. =

= . = -4P2. =

= = + = = -1,15

**b) Q(K;L) = 120K1/3L2/3**

εQ/K = . = 120..K-2/3L2/3. =

εQ/L = . = 120..K1/3L-1/3. =

= εQ/K + εQ/L = + = 1

Bài 24 : **Cho hàm sản xuất Y(t) = 0,2K0,4L0,8**

**Trong đó K = 120 + 0,1t ; L = 300 + 0,3t**

**a. Tính hệ số co dãn của Y theo K, L**

Ta có : Y = 0,2K0,4L0,8

= = = 0,4

= = = 0,8

**b. Tính hệ số tăng trưởng của K, L và Y**

Hệ số tăng trưởng của vốn K

= . =

Hệ số tăng trưởng của vốn L

= . = =

Hệ số tăng trưởng của Y :

= . =

=

= + = +

**c. Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất trong trường hợp này**

Ta có : = + = 0,4 + 0,8 = 1,2

Nếu trong điều kiện các yếu tố khác không đổi, nếu K và L tăng lên 1% thì Y tăng lên 1,2%

Bài 25 : **Cho hàm sản xuất Y(t) = 5K0,6L0,3**

**a. Tính Hệ số thay thế của K cho L**

Ta có : Y = 5K0,6L0,3

Hệ số thay thế của K cho L là :

= - = - =

**b. Cho biết chi phí đơn vị vốn wK = 5, chi phí đơn vị lao động wL = 3 . Tính mức sử dụng tối ưu vốn và lao động để đạt mức sản lượng cho trước Y0 = 30000**

Doanh nghiệp sử dụng tối đa vốn và lao động khi : TC(K, L) = wKK + wLL min

⇔ TC = 5K + 3L → min

Ta có : Y(t)= Y0 ⇔ 5K0,6L0,3 = 30000

Lập hàm Lagrange :

f(K, L, λ)= TC(K, L) + λ(Y0 – Y(t))= 5K + 3L + λ(30000-5K0,6L0,3)

;

;

;

Tìm điểm dừng:

⇔ ⇔ ⇔ ⇒ λ=23

⇒ tọa độ điểm dừng của f là: (K,L,λ)=(16762, 13968, 23)

Xét vi phân toàn phần cấp 2:

= K + L + 2 K + L -2.

Đặt g(K;L)= 5K0,6L0,3, ta có hàm vi phân toàn phần cấp 1 là :

+ (1)

;

Thay vào (1) ta được : dK +dL = 0

⬄ dL= ⇒ ⇒ = ≤ 0

Thay = ≤ 0

K + L + 2.

⇒ *d2f*  ≥ 0

Vậy TCmin khi K=, L=.

Bài 26: **Thu nhập quốc dân (Y) của một quốc gia có dạng: Y= 0.48 K0.4L0.3NX0.01**

**Trong đó : K là vốn, L là lao động và NX là xuất khẩu ròng.**

1. **Khi tăng 1% lao động sẽ ảnh hưởng như thế nào đến thu nhập?**

**Có ý kiến cho rằng giảm mức lao động xuống 2% thì có thể tăng xuất khẩu ròng 15% mà cho biết thu nhập vẫn không đổi , cho biết điều này đúng hay sai?**

1. **Cho nhịp tăng trưởng của NX là 4% của K là 3%, của L là 5%. Xác định nhịp tăng trưởng của Y.**

**Giải:**

a)\* Ta có:

 = . = 0,3

Vậy khi tăng lao động 1% thì thu nhập tăng 0,3%

khi giảm mức lao động xuống 2% thì thu nhập giảm : 0,3.2 = 0,6%

 = . = 0,01

khi tăng xuất khẩu ròng lên 15% thì thu nhập tăng: 0,01.15 = 0.15%

Vậy khi ta đồng thời giảm lao động xuống 2% và tăng xuất khẩu ròng lên 15% thì thu nhập thay đổi: -0,6% + 0,15% = -0,45

⇒ Khẳng định trên là sai.

b) Ta có:

 = 0,4; rk=3

 = 0,3; rL=5

 = 0,01; rNX=4

Vậy nhịp tăng trưởng của Y là:

 = .rK+ . + .

= 0,4.3 + 0,3.5 + 0,01.4 = 2,74%

Bài 27: **Giả sử dân số tăng theo mô hình P(t) = P(0)2bt và tiêu dùng của dân cư tăng theo mô hình C(t)= C(0)eat.**

1. **Tính hệ số tăng trưởng của dân số và tiêu dùng của dân cư.**
2. **Với điều kiện nào thì hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số. Nêu ý nghĩa của quan hệ đó.**
3. **Giả thiết lượng lao động được sử dụng tỉ lệ với dân số và có dạng L(t)= kP(t) (k<1); sản lượng Y(t) là một hàm vốn K(t) và lao động có dạng Cobb - Doughlas và C(t) là một hàm tuyến tính của Y(t). Xác định một mô hình thể hiện mối quan hệ giữa các biến.**

**Giải:**

a) Hệ số tăng trưởng của dân số:  
  
Hệ số tăng trưởng tiêu dùng của dân cư:  


b) Hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số khi a > bln2.  
Ý nghĩa: khi dân số tăng trưởng với tốc độ là bln2% thì tiêu dùng của dân cư tăng trưởng nhanh hơn với tốc độ a%.  
c) Hàm sản lượng Y(t) theo vốn K(t) và lao động L(t) có dạng:  


Với hàm tiêu dùng C(t) là một hàm tuyến tính của Y(t), ta có:  
C(t)=b+cY  


Bài 28: **Cho hàm tổng chi phí : TC= Q3- 5Q + 14Q+ 144**

1. **Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q= 2.**
2. **Cho giá sản phẩm là P= 70, với mức thuế doanh thu 20%, tính lợi nhuận khi Q=3.**

**Giải :**

1. Hệ số co giãn của TC theo Q:  
   

Hệ số co giãn của TC theo Q với Q=2:



1. Khi Q=3,   
   Doanh thu của doanh nghiệp: TR=P.Q=70.3=210  
   Thuế doanh thu: T=20%.TR=0,2.210=42  
   Lợi nhuận của công ty: 

Bài 29: **Cho nhu cầu hai mặt hàng phụ thuộc vào giá như sau:**

**Q1= 40-2P1-P2 ; Q2= 35-P1-P2**

**Hàm tổng chi phí là TC= Q12+2Q22+ 12. Trong đó Qi,, , Pi  là sản lượng và giá của hàng hóa,**

1. **Xác định Q1, Q2 sao cho tổng lợi nhuận là lớn nhất.**
2. **Xác định chi phí biên cho từng mặt hàng tối ưu tìm được câu a.**
3. **Hai mặt hàng này có thay thế cho nhau được không.**

**Giải:**

TR(

=

=

=

=

Tìm để lợi nhuận cực đại

Đạo hàm riêng của:

Tìm điểm dừng

Điểm dừng là :

Tại điểm dừng, ta có:

A = < 0

B =

C =

Xét AC – B2 = 28 > 0

Vậy tại điểm dừng và thì lợi nhuận cực đại.

1. MC(

MC(

Vớivà , ta có:

MC(. =

MC(. =

1. Ta có: Hệ số thay thế của Q1, Q2 là

= (Vì

Vậy hai mặt hàng này có thể thay thế cho nhau. Khi Q2 tăng 1 đơn vị để mức lợi nhuận không đổi thì Q1 giảm 2 đơn vị.

Bài 30: **Cho hàm tổng chi phí TC= 5000 +**

1. **Tìm hàm chi phí biên MC**
2. **Tính chi phí trung bình AC tại Q=100**
3. **Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q=17**

**Giải :**

Ta có hàm tổng chi phí là : TC= 500 +

1. Hàm chi phí biên là :

MC=TC’ = ( 500 + )’ =

1. Hàm chi phí trung bình AC là :

AC= = + , tại Q= 100 ta được AC(Q=100)= .

1. Hệ số co giãn của TC theo Q là :

ƐTC/Q= ∙ = tại Q=17 ta được

ƐTC/Q(17)= 0.0164 .

**Bài 31:** **Cho mô hình cung –cầu như sau:**

**QD= 10 + 0,1Y -0,2P**

**QS= -14 + 0,6P**

**Trong đó QD, QS  cung cấp và nhu cầu một loại hàng; Y là thu nhập trong dân cư (theo đầu người); P là giá cả.**

1. **Tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là:**

**a.1. QD = QS**

**a.2. QD =0,9QS**

**b) Tính hệ số co dãn của giá cân bằng theo Y tại 80 trong cả hai trường hợp trên. Giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả tính được**.

**Giải :**

1. tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là :

a1. Biểu thức giá cân bằng:

QD = QS

a2. Biểu thức cân bằng :

QD = 0,9 QS ↔ 10 + 0,1Y – 0,2P= 0,9 (−14 + 0,6P)

↔

1. Tính hệ số co giãn của giá cân bằng theo Y tại 80 trong cả hai trường hợp trên.

a1.

Ý nghĩa: Khi Y thay đổi 1thì P thay đổi 0.25

a2.

Ý nghĩa : Khi Y thay đổi 1% thì P thay đổi %.

**Bài 32:** **Cho hàm lợi ích tiêu dùng của một chủ thể có dạng như sau :**

**ln(TU(x,y))= 0.7lnx + 0,3lny**

**Cho biết x, y là khối lượng các hàng hóa. Cho p,q là giá các hàng hóa tương ứng, M là ngân sách tiêu dùng.**

1. **Có ý kiến cho rằng , nếu chủ thể tăng tiêu dùng x lên 1% và giảm tiêu dùng y đi 3% thì lợi ích tiêu dùng không đổi. Điều đó đúng hay sai.**
2. **Xác định phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó.**

**Giải:**

Ta có : ln(TU(x,y))= 0,7lnx + 0,3lny ⇔ eln(TU(x,y)) = e(0,7lnx + 0,3lny) ⇔ TU= x0,7y0,3

a) Ta có: hệ số co giãn của TU theo x là :

 = = 0,7

khi tăng tiêu dùng x lên 1% thì thu nhập tăng 0,7%

 = = 0,3

khi giảm tiêu dùng y đi 3% thì thu nhập giảm: 0,3.3 = 0,9%

Vậy khi ta đồng thời tăng tiêu dùng x lên 1% và giảm tiêu dùng y đi 3% thì thu nhập thay đổi: 0,7% + (-0,9%) = -0,2%, hay thu nhập giảm 0,2%

⇒ Khẳng định trên là sai.

1. Phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó:

Ta có : M = px+qy

Mặc khác : ln(TU(x,y))= 0.7lnx + 0,3lny ⇔

⇔ TU = x0,7y0,3

Yêu cầu : xác định phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó .

Tìm x,y để TU tối ưu với điều kiện ràng buộc là g = M – px –qy

Lập hàm Lagrange:

L(x,y,λ)= TU +λg= x0,7y0,3 +λ(M− px−qy)

Tìm các đạo hàm riêng :

;

;

M− px−qy ;

Tìm điểm dừng:

↔ Vậy điểm dừng

Tại điểm dừng ta xét hàm vi phân toàn phần cấp hai :

d2L(x,y)=

=

Đặt g(x,y) = M− px−qy

Với dx,dy thỏa phương trình sau:

dg= dy = 0 ↔ pdx + qdy=0 ↔ dx= − → d2L(x,y) < 0

Vậy phương án tiêu dùng tối ưu nhất tại

**Bài 33:** **Mỗi cá nhân sẽ được lợi từ thu nhập (INCOME) và nghỉ ngơi (LEISURE). Giả sử mỗi ngày có 12 giờ để chia ra thời gian làm việc và nghỉ ngơi.**

**Tiền lương của mỗi giờ làm việc là 3$ và hàm lợi ích của cá nhân là TU= L0,5I0,75**

**Trong đó : L là số giờ nghỉ, I là thu nhập**

**Cá nhân này sẽ cân đối thời gian nghỉ ngơi và làm việc thế nào để tối đa hóa lợi ích của mình?**

**Giải:**



Với điều kiện:  . Đặt  
Tọa độ điểm dừng:  


Ta có :



**Bài 34 :** **Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế (đóng) có mối lien hệ như sau: Y= C+ I+G;,**

**C=0,85Yd + 70; Yd = Y-T**

**Trong đó: Y là thu nhập quốc dân. C là tiêu dùng dân cư, Yd thu nhập khả dụng, I đầu tư, G là chi tiêu chính phủ, T thuế. Với I=200, G=550, T=500. Hãy:**

1. **Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng**
2. **Phân tích chủ trương kích càu của chính phủ thông qua chính sách giảm thuế.**

**Giải:**

1. Thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng:  
     
     
   b) Khi giảm thuế thì đầu tư tăng, dẫn đến đầu tư tăng, sản lượng tăng, thu nhập người dân tăng nên tăng tiêu dùng.

**Bài 35:** **Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế có mối liên hệ sau**

**Y= C+ I+G+X-M; C=0,08Yd; M= 0,015Yd; Yd= (1-t)Y**

**Trong đó Y là thu nhập quốc dân; C là tiêu dùng dân cư; Yd thu nhập khả dụng, I đầu tư, G là chi tiêu chính phủ; X là xuất khảu, M là nhập khẩu, t là thuế.**

**Với I= 700, G= 900. X=600, t= 0,15. Hãy**

1. **Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.**
2. **Vói chỉ tiêu ở câu a, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng đến thu nhập. Hãy xem xét ý kiến này.**

**Giải:**

⇔

Phương pháp định thức:

DetA = -1

= -0,935 – 0,065t

Det

Det

Với t ≥ 0 ta có DetA = -0,935 – 0,065t ≠ 0, suy ra :

Y =

1. Thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng là:

Y với I = 700, G = 900, X = 600, t = 0,15🡪 Y = 2328,66

1. Hệ số co giãn của Y(X)

Hệ số co giản củaY(G)

Nếu giảm xuất khẩu 10% thì thu nhập giảm

Nếu tăng chi tiêu 10% thì thu nhập tăng

Vậy ý kiến trên sai.

**Bài 36:** **Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng: Q= K(L+5); trong đó K, L lần luột là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là 70 và giá một đơn vị lao động là 20.**

1. **Nếu doanh nghiệp nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Tính mức sử dụng vốn và lao động sao cho việc sản xuất sản lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất.**
2. **Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K,L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của các hệ số đó.**
3. **Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó.**

**Giải:**

1. Q=K(L+5)=5600

TC= 70K+20L → min

Hàm Lagrange: f(K, L, λ) = 70K+20L+ λ(5600 – K(L+5))

Tìm điểm dừng:

⬄⬄L=

Thay L= vào (3) ta được:

5600- K( +5) = 0

⬄ 5600- L=135, λ =

= K + L + 2

Đặt g(K;L)= K(L+5)

+

Thay vào g(K;L) ta được : (L+5)dK +KdL = 0

Với L= 135, K=40, ta được:

140dK + 40dL= 0⬄ dL=

Thay dL=

Vậy TCmin khi K=40, L=135.

==

Vậy khi lao động tăng 1 đơn vị thì giá vốn sẽ giảm 7/2 đơn vị.

1. TC= 70K+20L = 5500

MC= TC’(Q) =λ =

ƐTC/Q= TC’(Q)×

Khi sản lượng tăng lên 1% thì chi phí tăng 28/55 %.

Bài 37: **Một công ty có hàm sản xuất Q= 0,5K(L-2) trong đó K,L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là pk= 120 và giá một đơn vị lao động là pL=60.**

1. **Nếu doanh nghiệp chi số tiền là 3000. Tính mức sử dụng vốn và lao động để tối ưu hóa sản lượng?**
2. **Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K,L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?**
3. **Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?**

**Giải:**

1. Q=0.5K(L-2)

TC= 120K + 60L=3000.

Hàm Lagrange : f(K;L;λ)= 0,5K(L-2) +λ(3000-120K-60L)

Thay L=2K +2 vào (3), ta được: 3000=120K + 60L

⬄ 120K+60(2K+2)=3000⬄240K=2880⬄K=12⇨L=26⇨λ=0,1

= K + L + 2=2×0,5 =

Điều kiện: 3000= 120K+60L

Vi phân toàn phần cấp 1:

Đặt g(K;L)=120K+60L

120dK +60dL =0

dL=-2dK

d2f=dKdL=dK.-2dK=-2d2K<0.

Vậy tối đa hóa sản lượng thì K=12, L=26, λ=0,1.

Khi lao động tăng 1 đơn vị thì vốn giảm 2 đơn vị.

1. ƐTC/Q= TC’(Q)×.

Khi sản lượng tăng 1% thì chi phí tăng 0,0048%.

Bài 38: **Một công ty có hàm sản xuất Q= K3/4L1/2 (K là vốn. L là lao động). Biết giá một đơn vị pk =30 và lao động pL =5.**

1. **Công ty cần sản xuất 2048 sản phẩm, khi đó công ty nên sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và lao động để tối thiểu hóa chi phí.**
2. **Tại thời điểm tối thiểu hóa chi phí, nếu sản lượng tăng lên 2% thì chi phí sẽ thay đổi như thế nào?**

**Giải:**

1. Q=K3/4L1/2=2048

TC=30K+5L→ min

Hàm Lagrange: f(K;L;λ)= 30K +5L + λ(2048-K3/4L1/2)

= 2048 -

⬄L=4K

Thay L =4K vào (3), ta được: 2048- K3/4(4K)1/2=0⬄K=256 ⇨ L=1024, λ=5.

= λ.

Tại M(256;1024;5)

= K + L + 2= K+ L - dKdL

ĐK : 2048= K3/4L1/2

Đặt: g(K;L)= K3/4L1/2

Hàm vi phân toàn phần cấp 1

Thay K= 256, L=1024.

⬄ 6dK +dL = 0 ⬄ dL=-6dK

d2f=

vậy TCmin  khi K=256, L=1024.

1. Q=K3/4L1/2 =2563/410241/2=2048

TC=λ=5

ƐTC/Q=TC’(Q)×Q/TC= 5×

Khi sản lượng tăng 2% thì chi phí tăng 1,6%

Bài 39: **Cho hàm sản xuất Y(t)= 0,4K0,5L0,9 trong đó K là vốn L là lao động.**

1. **Nếu tăng vốn K thêm 9% thì có thể giảm bớt lao động L đi bao nhiêu % để Y không đổi?**
2. **Sang năm tiếp theo nếu tăng vốn K 15% , lao động L 10% thì Y biến động như thế nào?**
3. **Cho biết hiệu qua của việc tăng quy mô sản xuất của các hàm sản xuất trên.**

**Giải:**

1. ƐY(t)/K==0,5

Khi K tăng 1% thì Y(t) tăng 0,5%

⇨ Khi K tăng 9% thì Y(t) tăng 4,5%

ƐY(t)/L=

Khi L giảm 1% thì Y(t) giảm 0,9%

⇨Khi Y không đổi⇨ L giảm 5%

1. Khi K tăng 15% thì Y(t) tăng 7,5%

Khi L tăng 10% thì Y(t) tăng 9%

⇨ Y tăng 16,5%

1. Khi tăng vốn và lao động thì sản lượng cũng tăng theo.

Bài 40: **Cho mô hình thu nhập quốc dân:**

**(a0, a1­, b0,b1> 0; a1 + b1 <1)**

**Trong đó: G0 là chi tiêu chính phủ, R0 là lãi suất; I là đầu tủ, C là tiêu dùng, Y là thu nhập**

1. **Hãy xác định Y, C ở trạng thái cân bằng.**
2. **Với b0 =200, b1= 0,7; a0=100; a1=0,2, a2=10; R0=7; G0=500, khi tăng chi tiêu của chính phủ 1% thì thu nhập cân bằng thay đổi bao nhiêu %?**

**Giải:**

1. Y= C+ I+G = b0 + b1Y + a0 +a1Y –a2R0+G0.

Y= b0+a0-a2R+ G0+(a1+b1)Y

⇨

(a1+b1< 1⬄1-(a1+b1)=0)

1. ƐY/G=.

Xét b0=200; b1=0,7

a0=100; a1=0,2

a2=10; R0=7; G0=500

Y= 7300

ƐY/G=

Nếu chi tiêu chính phủ tăng 1% thì Y tăng 0,685%.

# Chương II:

# MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ

Bài 1: **Cho biết hàm số sản xuất ngắn hạn Q= 100, L> 0 và giá sản phẩm là P= 5USD, giá thuê lao động là PL =3USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**



Bài 2: **Cho biết hàm tổng chi phí: TC(Q) = Q3-130Q2 + 12Q; Q>0. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất.**

**Giải:**

Chi phí trung bình AC min

⟺  
Vậy mức sản lượng Q=65 chi phí trung bình nhỏ nhất ACmin=12687(đvtt)

Bài 3: **Cho biết hàm tổng chi phí TC(Q) = Q3-8Q2+ 57Q+ 2; Q>0 và hàm cầu Q= 90-2P. Hãy xác định mức sản lượng Q để đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

TC(Q)= −8Q2+Q3+57Q+2; Q>0

Ta có: Q = 90 – 2P P = 45 –

TR = P.Q = (45 – )Q = 45Q –

= TR – TC = 45Q – + 2)

Cho , ta có :

Với

Vậy đạt cực đại tại , khi đó

Đơn giá

Vậy để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức

sản lượng Khi đó, lợi nhuận tương ứng sẽ là.

Bài 4: **Cho biết hàm chi phí là TC(Q)= 4Q3 +5Q2+500; Q>0 va hàm cầu Q= 11160- P. Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.**

**Giải:**

Hàm tổng chi phí là TC(Q) = 4Q3 + 5Q2 + 500

Hàm cầu Q= 11160 – P → P = 11160 – Q

Hàm doanh thu là : TR (Q) = P\*Q = (11160 – Q)\*Q = 11160Q – Q2

Lợi nhuận thu được là : π(Q) = TR(Q) – TC(Q) = 11160Q – Q2 – (4Q3 + 5Q2 + 500)

π(Q) = – 4Q3 − 6Q2 + 11160Q – 500

Xác định Q ≥ 0 để π(Q)max

ta có π’(Q) = −12Q2 −12Q + 11160  
π’(Q) = 0 ↔ −12Q2 −12Q + 11160 = 0 ↔ Q= 30(nhận) hay Q= −31(loại)  
π”(Q) = −24Q – 12 → π”(Q=30) = −24\*30 – 12= −732<0

Vậy lợi nhuận đạt cực đại tại Q=30, với πmax = 220900.

Bài 5: **Một công ty có hàm cầu về sản phẩm và hàm tổng chi phí là:**

**P= 2750- ; TC= -15Q3+2500Q (trong đó P là giá và Q là sản lượng)**

1. **Tính sản lượng và giá bán để tối đa hóa lợi nhuận? Tính và nêu ý nghĩa của hệ số co giãn của cầu sản phẩm theo giá và sản lượng tối ưu.**
2. **Tìm giá bán để tối ưu hóa sản lượng bán ra mà công ty không bị thua lỗ?**

**Giải:**

1. TR= P.Q= (2750- ).Q =2750Q -

π= TR- TC= 2750Q-

π’(Q)=0⬄ ⬄Q1=200 hoặc Q2=-25/2(loại)

π’’(Q)=

π’’(200)= -21,25<0

Vậy πmax đạt cực đại tại Q=200⇨P= 1625

ƐQ/P=Q’(P)×

Ɛ(P=1625)=-1,72

Khi sản lượng tăng 1% thì chi phí giảm 1,72%

Bài 6: **Một công ty cạnh tranh hoàn hảo có thể sản xuất và cung ứng cho thị trường hai loại mặt hàng với hàm tổng chi phí kết hợp là TC= 2Q12+ 3Q1Q2+3Q22**

1. **Cho biết giá tại các mặt hàng là P1=20, P2=30. Hãy xác định mức sản lượng và lợi nhuận tối ưu.**
2. **Tại thời điểm tối ưu nếu tăng sản lượng mặt hàng loại 1 thêm 5%, tăng sản lượng mặt hàng loại 2 thêm 8% thì chi phí biến động như thế nào?**

**Giải:**

1. TR= 20Q1+ 30Q2

π= TR- TC= 20Q1+30Q2-2Q12-3Q1Q2-3Q22

⬄

A= ; B= -3 ; C==-6

⇨ πmax khi (Q1; Q2)= (2;4)

1. ƐTC/Q1= TC’(Q1)×= 20×

Khi Q1 tăng 1% thì chi phí tăng 0,5%

⇨ Khi Q2 tăng 5% thì chi phí tăng 2,5%

ƐTC/Q2= TC’(Q2)= 30×

Khi Q2 tăng 1% thì chi phí tăng 1,5%

⇨ Khi Q2 tăng 8% thì chi phí tăng 12%

Bài 7: **Người ta ước lượng hàm sản xuất hằng ngày của một doanh nghiệp như sau: Q= 80**

1. **Với K= 25, L=64. Hãy cho biết mức sản xuất hằng ngày của doanh nghiệp.**
2. **Bằng các đạo hàm riêng của Q, cho biết nếu doanh nghiệp**

* **Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên mức K= 25 thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?**
* **Sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên mức L= 64 thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?**

1. **Nếu giá thuê một đơn vị tư bản K=12, và giá đơn vị lao động L=2,5 và doanh nghiệp sử dụng yếu tố đầu vào nêu trong câu a) thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm đơn vị K hay L.**

**Giải :**

a)

Tại K=25; L=64 mức sản xuất hàng ngày của doanh nghiệp là

b)Ta có đạo hàm riêng của Q theo L là:

Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên K=25, thì sản lượng thay đổi một lượng: đơn vị.

Ta có đạo hàm riêng của Q theo K:

Sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên L=64 thì sản lượng thay đổi 1 lượng: đơn vị.

1. Lập tỷ số:

Ta thấy :

Nên L tăng 1 đơn vị thì độ tăng Q theo K tăng 3,3 suy ra ta sẽ chọn L.

Bài 8: **Cho hàm lợi ích TU= 3xy -2x2-y2; x,y >0**

1. **Tại x0= 50, y0=60, nếu x tăng thêm một đơn vị và y không đổi, hỏi lợi ích thay đổi như thế nào?.**
2. **Tính MUy, tại x0=50, y0= 60, giải thích ý nghĩa.**

**Giải:**

MUx =

Nếu x tăng thêm một đơn vị và y không đổi thì lợi ích sẽ giảm 20 đơn vị.

1. MUy= = 3x – 2y

MUy(50;60) = 3.50 – 2.60 = 30

Nếu y tăng thêm một đơn vị thì lợi ích sẽ tăng 30 đơn vị.

Bài 9: **Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: Q1 = 1300 - P1; Q2 = 675 - 0,5P2**

**Và hàm chi phí kết hợp là TC= Q12 + 3Q1Q2 + Q22. Hãy cho biết mức sản lượng Q1, Q2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Điều kiện về mức sản lượng Q1, Q2 > 0

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P1, P2 sao cho

1300 – P1 = Q1

675 – 0,5P2 = Q2

Doanh thu TR = P.Q = P1Q1 + P2Q2 = 1300Q1 – Q12 + 1350Q2 – 2Q22

Lợi nhuận π = TR – TC = 1300Q1 – Q12 + 1350Q2 – 2Q22 – Q12 – 3Q1Q2 – Q22

⇔ π = – 2Q12 – 3Q22 + 1300Q1 + 1350Q2 – 3Q1Q2.

Để đạt được lợi nhuận tối đa: πmax

Tọa độ điểm dừng tại

⇔

Xét tại điểm dừng, ta có

A = -4 < 0

Δ = A.C – B2 = (-4).(-6) – (-3)2 = 15> 0

Vậy πmax tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng Q1=250 và Q2=100 ứng với mức giá P1 = 1050, P2 = 1150.

Bài 10: **Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm như sau:**

**Hãy tìm Q1; Q2  để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Ta có:  
 ; ;  
Lợi nhuận tối đa⟺

⟺  
Đặt: A= <0  
 C=

Ta có:  
AC−B2=(−6)(−4)−(−2)2= 20 > 0 vậy doanh nghiệp đạt lợi nhuận cực đại tại

Bài 11: **Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: Q1 = 25 – 0,5P1; Q2 = 30 – P2**

**Và hàm chi phí kết hợp là: Hãy cho biết mức sản lượng Q1, Q2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Điều kiện về mức sản lượng Q1, Q2 > 0

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P1, P2 sao cho

25 – 0,5P1 = Q1

30 – P2 = Q2

Doanh thu TR = P.Q = P1Q1 + P2Q2 = 50Q1 – 2Q12 + 30Q2 – Q22

Lợi nhuận π = TR – TC = 50Q1 – 2Q12 + 30Q2 – Q22 – Q12 – 2Q1Q2 – Q22 – 20

⇔ π = – 3Q12 – 2Q22 + 50Q1 + 30Q2 – 2Q1Q2 – 20.

Để đạt được lợi nhuận tối đa: πmax

Tọa độ điểm dừng tại

⇔

Xét tại điểm dừng, ta có

A = -6 < 0

Δ = A.C – B2 = (-6).(-4) – (-2)2 = 20 > 0

Vậy πmax tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng Q1=7 và Q2=4 ứng với mức giá P1=36, P2=26.

Bài 12: **Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: Q1 = 50 – 0,5P1; Q2 = 76 – P2**

**Và hàm chi phí kết hợp là: Hãy cho biết mức sản lượng Q1, Q2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Điều kiện về mức sản lượng Q1, Q2 > 0

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P1, P2 sao cho

50 – 0,5P1 = Q1

76 – P2 = Q2

Doanh thu TR = P.Q = P1Q1 + P2Q2 = 100Q1 – 2Q12 + 76Q2 – Q22

Lợi nhuận π = TR – TC = 100Q1 – 2Q12 + 76Q2 – Q22 – 3Q12 – 2Q1Q2 – 2Q22 – 55

⇔ π = – 5Q12 – 3Q22 + 100Q1 + 76Q2 – 2Q1Q2 – 55.

Để đạt được lợi nhuận tối đa: πmax

Tọa độ điểm dừng tại

⇔

Xét tại điểm dừng, ta có

A = -10 < 0

Δ = A.C – B2 = (-10).(-6) – (-2)2 = 56 > 0

Vậy πmax tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng Q1=8 và Q2=10 ứng với giá bán là P1=84, P2=66.

Bài 13: **Cho hàm sản xuất của hãng Q = 10K0,3L0,4, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Ta có Q = 10K0,3 L0,4 => hàm doanh thu TR = P.Q = 40K0,3 L0,4

wK = 0,03 wL = 2 => hàm chi phí TC = 0,03K + 2L

Lợi nhuận: = TR – TC = 40K0,3 L0,4 - 0,03K - 2L

(L,K) = 16K0.3 L-0.6 – 2

(L,K) = 12K0.7 L0.4 – 0.03

(L,K) = -9,6K0, 3 L-1,6

(L,K) = -8,4K-1,7 L-0.4

(L,K) = 4,8K-0,7 L-0.6

Tìm điểm dừng : (L,K) = 16K0.3 L-0.6 – 2 = 0 16K0.3 L-0.6 – 2 = 0

(L,K) = 12K0.7 L0.4 – 0.03 = 0 K =

Xét điểm dừng (L,K) ta có :

A = -9,6K0,3L-1,6 < 0; B = 4,8K-0,7L-0,6; C = -8,4K-1,7L0,4

∆ = AC – B2 ≈ 1,4.10-14 > 0 nên đạt cực đại tại điểm dừng (L,K) = (51200;2560000)

Vậy L = 51200, K = 2560000 thì hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Bài 14 : **Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm lợi nhuận của doanh nghiệp π = 15Q1 + 12Q2 – 3Q1 -**

**Hãy tìm Q1, Q2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải :**

Ta có: π = 15Q1 + 12Q2 – 3Q1 -

(Q1,Q2) = 15 -3 -3

(Q1,Q2) = 12 – 6

( Q1,Q2) = -6

( Q1,Q2) = -6

( Q1,Q2) = -6

Xác định điểm dừng : 15 -3 -3 = 0 Q1 = 1

12 – 6 = 0 ⇔ Q2 = 2

Q1 = 2

Q2 = 1

→ π có điểm dừng là (Q1,Q2) = (2;1) hoặc (Q1,Q2) = (1;2)

Với Q1 = 1

Q2 = 2

Ta có : ( Q1,Q2) = -6

( Q1,Q2) = -12

( Q1,Q2) = -6

A = -6 < 0

Δ = AC –B2 = -108 < 0

hàm lợi nhuận không đạt cực đại.

Với Q1 = 2

Q2 = 1

Ta có : : ( Q1,Q2) = -12

( Q1,Q2) = -6

( Q1,Q2) = -12

A = -12 <0

Δ = AC –B2 = 108 > 0

π đạt cực đại tại (Q1,Q2) = (2,1)

Vậy, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa thì (Q1,Q2) = (2,1).

## Bài 15:

**Doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất:**

**Q = -2K2 + 3KL – 2L2 + 30K + 20L ; ( K,L > 0 )**

**a)** **Hãy xác định mức sử dụng K,L để doanh nghiệp thu được mức sản lượng cực đại.**

*Q*'*K* (*K*;*L*)  4*K*  3*L*  30

*Q*'*L* (*K*;*L*)  3*K*  6*L*  20

Gọi M(K;L) là điểm dừng được xác định.

*Q*'*K* (*K*;*L*)  0 -4K + 3L + 30 = 0 K = 16

*Q*'*L* (*K*;*L*)   0 3K -6L + 20 = 0 L = 34/3

M ( 16; 34/3)

Xét: A = Q”K (K;L) = -4 B = Q”K,L (K;L) = 3 C = Q”L(K;L) = -6

∆= AC – B2 = 15 > 0

A < 0 Q max tại M (16; 34/3)

∆ > 0

Vậy tại K = 16, L = 34/3 thì doanh nghiệp thu được mức sản lượng cực đại.

**b)** **Biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 4, giá thuê một đơn vị lao động bằng 22, giá**

**sản phẩm bằng 2. Hãy xác định mức sử dụng K,L để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.**

PK = 4 ; PL = 22 ; Ptt = 2

Ta có :

LPL  KPK = 22 L  4 K  TC

TR  P.Q  2.(2K 2  3KL  2L2  30K  20L)

 4K 2  6KL  6L2  60K  40L

Để DN thu được lợi nhuận tối đa:

= TR –TC = -4K2 + 6KL – 6L2 + 60K + 40L – 22L – 4K

( K,L) = -8K + 6L +56

( K,L) = 6K -12L + 18

Gọi H ( K,L) là điểm dừng được xác định : ( K,L) = 0 -8K + 6L +56 = 0

( K,L) = 0 6K -12L + 18 = 0

K = 13 H ( 13,8)

L = 8

Xét : A = ( K,L) = -8 ; B = ( K,L) = 6 ; C = ( K,L) = -12

∆ = AC –B2 = 60 > 0 và A < 0 Q*max* tại H (13,8)

∆ > 0

## Bài 16 :

**Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm.**

**Hàm cầu là:*QD*  300 *P* và hàm tổng chi phí*TC*(*Q*) *Q*3 19*Q*2  333*Q* 10 .**

**Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Với một mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho*QD* *Q* . Do đó, ta có:

*QD* *Q*  300 *P* *Q*  300 *Q* *P*

Mặt khác, ta có:

Doanh thu của xí nghiệp là:*TR* *P*.*Q*  (300 *Q*).*Q*  300*Q* *Q*2

Doanh đạt lợi nhuận tối đa : = TR – TC = Q3 + 18Q2 – 33Q + 10

Với Q > 0 thì = –3Q 2 + 36Q – 33

= 0 ⬄ –3Q 2 + 36Q – 33 = 0 ⬄ Q = 11 ( chọn)

Q = 1 ( chọn)

Mặt khác :

= –6Q + 36

(11) = –30 < 0 => đạt cực đại ( thỏa yêu cầu bài toán)

(1) = 30 >0 => đạt cực tiểu ( không thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy với Q = 11 thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

Bài 17: **Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là QD = 2640 – P và hàm tổng chi phí TC(Q) = Q2 + 1000Q + 100. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.**

**Giải:**

Với một mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp phải bán theo đơn giá P sao cho

*QD* *Q* . Ta có:*QD* *Q*  2640 *P* *Q* *P*  2640 *Q*

Doanh thu của xí nghiệp là:*TR*(*Q*) *PQ*  *Q*2  2640*Q*

Tiền thuế của xí nghiệp:*T* (*t*) *Qt*

Lợi nhuận xí nghiệp thu được:

 (*Q*) *TR*(*Q*) *TC*(*Q*) *Qt*

 *Q* 2  2640*Q* *Q* 2 1000*Q* 100 *Qt*

 2*Q* 2  (1640 *t*)*Q* 100

Xác định*Q*  0 sao cho  đạt giá trị lớn nhất. Ta có:

( Q) = –4Q + 1640 – t

( Q) = 0 ⬄ –4Q + 1640 – t = 0 ⬄ Q = + 410

( Q) = –4 < 0 Cực đại

Vậy Q = + 410 là mức sản lượng để

Khi đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là :

T(t) = tQ = + 410t

Ta cần xác định t > 0 sao cho T(t) đạt cực đại.

Ta có : T’(t) = + 410

T”(t) = 0 ⬄ + 410 = 0 ⬄ t = 820

T”(t = 820) = < 0 Cực đại

Vậy với t = 820 thì tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là lớn nhất Tmax = 168100

Bài 18: **Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là QS = P – 200 và QD = 1800 – P (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu ( nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là P1 = 500. Một công ty được độc quyền nhập khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bản trên thị trường quốc tế).**

**Giải :**

Điểm cân bằng trong thị trường nội địa : QS=QD 1800 – P = P -200 P= 1000 (P0 =1000)

Gọi t là thuế trên 1 đơn vị sản phẩm thỏa mãn điều kiện :

t > 0 ; t + P1 < P0  t + 500 < 1000 (1)

Lượng hàng mà công ty nhập về là: QD - QS= 1800 –P –P +200 = 2000 –2P

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

(P) = ( P –P1 –t)(QD -QS) = (P –500 –t)(2000 –2P)

=2000P –2P2 –1000000 +1000P -2000t +2Pt

= – 2P2 + (3000 +2t)P -2000t -1000000

(P) = –4P +3000+ 2t

(P) = 0 ⬄ –4P +3000+ 2t =0

⬄ P = = 750 +

(P) = –4 < 0 => (750 + ) = –4

Tiền thuế công ty phải nộp:

T(t) = t(QD -QS) = t(2000 -2P) = t(2000 -2(750 + ))= 500t –t2

T’(t) = 500-2t

T’(t) =0  500 -2t =0  t =250 (thỏa mãn điều kiện (1))

T’’(t) = –2 <0  Vậy t = 250 là giá cần tìm

Bài 19 : **Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là QS = P – 20 và QD = 400 – P (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu ( nhưng chưa tính thuế xuất khẩu) là P1 = 310. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bản trên thị trường quốc tế).**

**Giải :**

Điểm cân bằng trong thị trường nội địa : QS=QD  P -20 = 400 –P  P =210 (P0 =210).

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thỏa điều kiện

t > 0 ; 310 –t > 210  t < 100 (\*)

Khi đó lượng hàng mà công ty xuất khẩu là : QS – QD = P -20 -400 +P = 2P -420

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

(P) = (P1 – P –t)(QS – QD) = (310 –P –t)(2P -420) = 620P -130200 -2P2 +420P -2Pt+420t

= -2P2 + (1040 – 2t)P + 420t -130200

(P) = – 4P + 1040 – 2t

(P) = 0 ⬄ P = = 260 – 0.5t

(P) = –4 < 0 => (260 – ) = –4

Tiền thuế mà công ty cần phải nộp:

   = 15

T(t) = t(QS – QD) = t(2P -420) = t( 2(260 -0.5t) -420) = 100t – t2

T’(t) = 100 -2t

T’(t) =0  100 -2t =0  t= 50 (thỏa mãn điều kiện (\*))

T’’(t) =-2 <0  Vậy t = 50 là giá cần tìm

Bài 20 : **Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá hai loại sản phẩm trên thị trường là P1 = 60 và P2 = 75. Hàm tổng chi phí là : TC = . Hãy xác định các mức sản lượng Q1 và Q2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải :**

Tổng doanh thu: TR = P1Q1 + P2Q2 = 60Q1 + 75Q2

Hàm lợi nhuận: π = 60Q1+ 75Q2 –  – Q1Q2 –

Ta có : ( Q1,Q2) = 60 – 2Q1 – Q2  và ( Q1,Q2) = 75 –Q1 – 2Q2

( Q1,Q2) = –2

( Q1,Q2) = –1

( Q1,Q2) = –2

Xác định điểm dừng :

60 – 2Q1 – Q2 = 0 Q1 = 15 có điểm dừng là (Q1, Q2) = ( 15,30)

75 –Q1 – 2Q2 = 0 Q2 = 30

Ta có : Δ = AC – B2= 3 > 0 nên π max tại Q1=15 và Q2=30

Bài 21: **Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là :**

**Với hàm tổng chi phí là : TC = . Hãy định các mức sản lượng Q1 và Q2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.**

**Giải :**

Q1 = 40 – 2P1 + P2  P1 = 55 – Q2 – Q1

Q2 = 15 + P1 – P2  P2 = 70 – Q1 – 2Q2

Hàm doanh thu là TR = P1Q1 + P2Q2 = 55Q1 +70Q2 – – 2– 2Q1Q2

Lợi nhuận là π = TR – TC = 55Q1 + 70Q2– 2– 3– 3Q1Q2

( Q1,Q2) = 55– 3Q2– 4Q1

(Q1,Q2) = 70 – 6Q2 - 3Q1

(Q1,Q2) = -4

(Q1,Q2) = -6

Tìm điểm dừng : ( Q1,Q2) = 55– 3Q2 – 4Q1 = 0 Q1 = 8

(Q1,Q2) = 70 – 6Q2 - 3Q1 Q2  =

* Điểm dừng (Q1,Q2)  = (8 ; )

Xét điểm dừng (Q1,Q2)  = (8 ; ),ta có :

A = -4 <0; B = -3; C = -6

∆ = AC – B2 = 15 > 0 nên đạt cực đại tại (Q1,Q2) = (8;)

Vậy Q1 = 8; Q2  = thì doanh nghiệp đạt lợi nhuận cực đại.

Bài 22 : **Một người muốn dung số tiền 178000000 đồng để mua hai mặt hàng có đơn giá P1 = 400000 đồng và P2 = 600000 đồng. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là *TU*  (*x*1  20).(*x*2 10) (x1, x2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai loại mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.**

**Giải :**

*x*1,*x*2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng

*TU*  (*x*1  20).(*x*2 10)

Điều kiện:*M* *P x*1 *P x*2

178000000 400000*x*1  600000*x*2  890 2*x*1  3*x*2  2*x*1  3*x*2  890  0

Đặt:*g*(*x*1,*x*2 )  2*x*1  3*x*2  890

Thiết lập hàm Lagrange:*L*(*x*1,*x*2 ,) *TU*(*x*1,*x*2 )  *g*(*x*1,*x*2 )

*L*(*x*1,*x*2 ,)  (*x*1  20)(*x*2 10)  (2*x*1  3*x*2  890)

Ta có :

= x2 + 10 + 2

x1 + 20 + 3

= 2x1 + 3x2 – 890

= 0





a tìm tọa độ điểm dừng M của hàm Larange là nghiệm của hệ:

= 0 x2 + 10 + 2x1 = 0

x1 + 20 + 3 x2 = 0 M(220;150;-80)

= 0 2x1 + 3x2 – 890 = 0 

Vi phân toàn phần cấp 2

(x1,x2,

 (M) = 0 + 2 + 02 (\*)

thỏa = 0

⬄ 2 + 3 = 0⬄ ,thế (\*),ta được:

(M) = 2 < 0 => TU ( đạt cực đại tại M

Vậy TUmax = 38400 ⬄ x1 = 220

x2 = 150

Bài 23 : **Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Sản lượng** | **Sản phẩm trung gian** | | | **SPCC** |
| **300** | **60** | **24** | **80** | **136** |
| **240** | **30** | **48** | **40** | **122** |
| **400** | **90** | **24** | **120** | **166** |
| **Lao động** | **30** | **36** | **40** | **Năm (t+1)** |

1. **Hãy xác định các hệ số kỹ thuật và hệ số sử dụng lao động năm t.**

Gọi là các hệ số kỹ thuật

Nên ma trận

Gọi

Nên ma trận

1. **Biết q(t+1)=(150 ; 140 ; 180) và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).**

Ta có : =

Nên Q( t+1) =

q11 =.Q1 = 0.2 x 330.8 = 66.16 q12 = .Q2 = 0.1 x 271.05 = 27.1 q21 =Q1 = 0.1 x 330.8 = 33.08 q22 = .Q2= 0.2 x 271.05 = 54.21 q31 =.Q1 = 0.3 x 330.8 = 99.24 q32 = .Q2 = 0.1 x 271.05 = 27.1

q13 =Q3 = 0.2 x 437.63 = 87.5 q23 = .Q3 = 0.1 x 437.63 = 43.76

q33 =.Q3 = 0.3 x 437.63 = 131.29

q01 =.Q1 = 0.1 x 330.8 = 33.08 q02 =.Q2 = 0.15 x 271.05 = 40.6

q03 =.Q3 = 0.1 x 437.63 = 43.76

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Sản lượng | Sản phẩm trung gian | | | SPCC |
| 330.8 | 66.16 | 27.1 | 87.5 | 150 |
| 271.05 | 33.08 | 54.21 | 43.76 | 140 |
| 437.63 | 99.24 | 27.1 | 131.29 | 180 |
| Lao động | 87.5 | 43.76 | 40.6 | Năm (t+2) |

1. **Xác định vectơ giá trị sản phẩm được sản xuất ra. Biết giá trị gia tăng của các ngành là wT = (0,05 ; 0,1 ; 0,15).**

Gọi P là vector giá trị sản phẩm được sản xuất ra :

Với



Vậy P = ( 0.163 ; 0.184 ; 0.31 )

Bài 24 : **Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Sản lượng** | **Sản phẩm trung gian** | | | **SPCC** |
| **210** | **42** | **36** | **66** |  |
|  | **0** | **36** | **22** | **122** |
| **220** |  | **18** | **22** | **96** |
| **Lao động** | **42** | **18** | **66** | **Năm (t+1)** |

1. **Hãy tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.**

Các giá trị còn thiếu:

*q*1 *Q*1  (*q*11 *q*12 *q*13)  210  (12  36  66)  66

*Q*2 *q*21 *q*22 *q*23 *q*2  0  36  22  96  180

*q*31 *Q*3  (*q*32 *q*33 *q*3 )  220  (18  22  96)  84

1. **Hãy xác định ma trận hệ số kỹ thuật và vecto sử dụng lao động năm t**.

Ta có :

Ma trận hệ số kỹ thuật :

Ta có :

Vector sử dụng lao động :

1. **Nếu biết α31(t+1) = α31(t) còn các hệ số khác không đổi và q(t+1) = (70, 130, 100). Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).**

Ta có

với các hệ số khác không đổi



Ta có : ;với det ( = 0,516

=

Vậy : Q(t+1) =

* Ta có :

q11 =.Q1 = 0.2 x =  q12=.Q2 = 0.2 x  =  q21 =Q1 = 0  q22 =.Q2= 0.2 x  =

q31 =.Q1 = 0.2 x  =  q32 =.Q2 = 0.1 x  =

q13 =Q3 = 0.3x175,969 = 52,7907 q23 =.Q3 = 0.1 x 175,969 = 17,5969

q33 =.Q3 = 0.1 x 175,969 = 17,5969

q01 =.Q1 = 0.2 x =  q02 =.Q2 = 0.1 x =

q03 =.Q3 = 0.3 x 175,969 = 52,7907

* Bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật (t+1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Sản lượng | Sản phẩm trung gian | | | SPCC |
|  |  |  | 52,7907 | 70 |
|  | 0 |  | 17,5969 | 130 |
| 175,969 |  |  | 17,5969 | 100 |
| Lao động |  |  | 52,7907 |  |

Bài 25 : **Cho ma trận hệ số kỹ thuật của năm t của 3 ngành dạng hiện vật :**

**α(t) = và vectơ sử dụng lao động năm t : β(t) = (0,1 ; 0,2 ; 0,15)**

1. **Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở cùng cột 3 của ma trận này.**

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t

det

Ý nghĩa kinh tế các phần tử ở cùng cột 3 của ma trận là :

Với có nghĩa : Để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm cuối cùng của ngành 3 thì ngành 1,2,3 cần cung cấp cho ngành 3 lượng sản phẩm lần lượt là : 0,1 ;0,45 ;

1. **Biết q(t+1) = (60, 50, 70) và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành của năm (t+1).**

q(t+1) = ( 60 50 70)

Q(t+1) = =

Ta có bảng cân đối liên ngành năm t+1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Sản lượng | Sản phẩm trung gian | | | SPCC |
| 94 | 9,4 | 24,6 | 0 | 60 |
| 123 | 18,8 | 12,3 | 42,9 | 50 |
| 139,6 | 18,8 | 36,9 |  | 70 |
| Lao động | 9,4 | 24,6 | 20,95 | Năm (t+1) |

1. **Xác định vecto giá trị sản phẩm các ngành, biết phần giá trị gia tăng của các ngành là wT = (0,05; 0,1; 0,15).**

Vectơ giá trị sản phẩm các ngành :

Bài 26 : **Cho bảng cân đối liên ngành năm t của 3 ngành :**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ngành** | **GTSX** | **xij** | | | **NCCC** |
| **1** | **2** | **3** |
| **1** | **2500** | **250** | **x12** | **400** | **1490** |
| **2** | **1800** | **500** | **180** | **400** | **X2** |
| **3** | **2000** | **750** | **360** | **200** | **690** |
|  | **GTGT** | **Z1** | **180** | **400** | **V** |

1. **Tìm các hệ số còn lại trên bảng.**

Z1 = 1000 ; x12 = 360

1. **Tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp năm t, giải thích ý nghĩa hệ số a32.**

Ma trận hệ số chi phí trực tiếp năm t : A =

 : cho biết để có 1 đơn vị sản phẩm ngành 2 thì ngành 3 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này 1 lượng sản phẩm là 0,2 đơn vị.

1. **Nếu năm (t+1) nhu cầu về SPCC của các ngành là : (540 ;250 ;300) đơn vị tỷ VNĐ. Lập bảng cân đối liên ngành cho năm (t+1), biết A(t+1)=A(t).**

Vectơ hệ số chi phí đầu vào :

Ta có : A(t+1) = A(t)

I – A(t+1) =

Y(t+1) = .Y(t+1) =

x11= a11Y1 = 0,1.920,75 = 92.075 x21= a21Y1 = 0,2.920,75 = 184,15

x12= a12Y2 = 0,2.657,12 = 131.424 x22= a22Y2 = 0,1.657,12 = 65,712

x13= a13Y3 = 0,2.786,28 = 157,256 x23= a23Y3 = 0,2.786,28 = 157,26

x31= a31Y1 = 0,3. 920,75 = 276,225 Z1= b1Y1 = 0,4.920,75 = 368,3

x32= a32Y2 = 0,2.657,12 = 131.424 Z2= b2Y2 = 0,5.657,12 = 328,56

x33= a33Y3 = 0,1.786,28 = 78,628 Z3= b3Y3= 0,5.786,28 = 393,14

Bảng cân đối liên ngành năm (t+1)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ngành | GTSX |  | | | NCCC |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 920,755 | 92,075 | 131,424 | 157,256 | 540 |
| 2 | 657,118 | 184,15 | 65,712 | 157,256 | 250 |
| 3 | 486,277 | 276,225 | 131,424 | 78,628 | 300 |
|  | GTGT | 368,3 | 328,56 | 393,14 |  |

Bài 27 : **Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là :**

**A(t) =**

**Hệ số chi phí tương ứng là : (0,2 ; 0,2 ; 0,1), giá trị sản lượng của các ngành ở năm t là :**

**Y(t) =**

1. **Lập bảng cân đối liên ngành năm t.**

X11 = 0,2 . 1450 = 290

X12 = 0 . 1990 = 0

X13 = 0,3 . 1500 = 450

X21 = 0,1 . 1450 = 145

X22 = 0,1 . 1990 = 199

X23 = 0,1 . 1500 = 150

X31 = 0,2 . 1450 = 290

X32 = 0,2 . 1990 = 398

X33 = 0,1 . 1500 = 150

Bảng cân đối liên ngành năm t:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ngành | GTSX | Xij | | | NCCC |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1450 | 290 | 0 | 450 | 710 |
| 2 | 1990 | 145 | 199 | 150 | 1496 |
| 3 | 1500 | 290 | 398 | 150 | 662 |
|  | GTGT | 725 | 1393 | 750 | V = 2868 |
| GTSX | 4940 | 1450 | 1990 | 1500 |  |

1. **Lập ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t**.

Ta có:

* Ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t :

C =

1. **Biết X(t+1)=(800, 1500, 700) và các hệ số không đổi, lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).**

Do các hệ số không đổi nên

A( t+1) = A(t) =

Mà X( t+1) =

X11 = 0,2 . 1593 = 319

X12 = 0 . 2019 = 0

X13 = 0,3 . 1580 = 474

X21 = 0,1 . 1593 = 159

X22 = 0,1 . 2019= 202

X23 = 0,1 . 1580 = 158

X31 = 0,2 . 1593 = 319

X32 = 0,2 . 2019 = 404

X33 = 0,1 . 1580 = 158

Bảng cân đối liên ngành năm t+1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ngành | GTSX | Xij | | | NCCC |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1593 | 319 | 0 | 474 | 800 |
| 2 | 2019 | 159 | 202 | 158 | 1500 |
| 3 | 1580 | 319 | 202 | 158 | 700 |
|  | GTGT | 796 | 1615 | 790 | V = 3000 |
| GTSX | 5193 | 1593 | 2019 | 1580 |  |

Bài 28: **Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:**

**A =**

**Hệ số chi phí lương là : (0,2 ; 0,1 ; 0,2)**

**Giá trị sản lượng của các ngành ở năm t là :**

**Y(t) =**

1. **Lập bảng cân đối liên ngành năm t :**

X11 = 0,3 . 1450 = 135

X12 = 0,2 . 600 = 120

X13 = 0,3 . 560 = 168

X21 = 0,1 . 450 = 45

X22 = 0,3 . 600 = 180

X23 = 0,2 . 560 = 112

X31 = 0,3 . 450 = 135

X32= 0,3 . 600 = 180

X33 = 0,2 . 560 = 112

Bảng cân đối liên ngành năm t:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ngành | GTSX | Xij | | | NCCC |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 450 | 135 | 120 | 168 | 27 |
| 2 | 600 | 45 | 180 | 112 | 263 |
| 3 | 560 | 135 | 180 | 112 | 133 |
|  | GTGT | 135 | 120 | 168 | V = 423 |
| GTSX | 1610 | 450 | 600 | 560 |  |

1. **Lập ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.**

C =

Ý nghĩa: 0,68 là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,68.

1. **Năm (t+1) nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là (180; 150; 100) (tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm (t+1) và năm t như nhau.**

Ta có : Các hệ số chi phí năm (t+1) và năm t như nhau nên

A(t+1) = A(t) = và x(t+1) =

Y(t+1) =

Vậy giá trị sản lượng của các ngành ở năm (t+1) là Y(t+1) =

Bài 29 : **Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Giá trị Tổng sản lượng** | **Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian** | | | **Giá trị sản phẩm cuối cùng** |
| **600** | **120** | **90** | **56** |  |
| **450** | **60** | **45** | **112** |  |
| **560** | **90** | **22,5** | **168** |  |
| **Nhập khẩu** | **30** | **45** | **84** |  |
| **Lương** | **60** | **67,5** | **28** |
| **Khấu hao** | **60** | **45** | **28** |
| **Thuế** | **60** | **45** | **28** |
| **Lợi nhuận** | **120** | **90** | **56** |

1. **Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.**

x1 = X1 - = 600 – (120+90+56) = 334

x2 = X2 - = 450 – (60+45+112) = 233

x3 = X3 - = 560 – (90+22,5+168) = 279,5

1. **Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử năm ở dòng 2 cột 3.**

a11 = ; a12 = ; a13 = ;  
a21 = ; a22 = ; a23 = ;

a31 = ; a32 = ; a33 = .

⇒ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

A =

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

C = (I - A)-1==

Ý nghĩa phần tử c23 = là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,3679.

1. **Tìm ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.**

b11 = ; b12 = ; b13 = ;

b21 = ; b22 = ; b23 = ;

b31 = ; b32 = ; b33 = ;

b41 = ; b42 = ; b43 = ;

b51 = ; b52 = ; b53 = ;

⇒ ma trận các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t là:

B =

Ý nghĩa kinh tế của phần tử b13 = 0,05 là: Để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành 3 thì ngành này phải sử dụng trực tiếp 0,05 đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ 1.

1. **Giả sử các hệ số năm (t+1) không đổi so với năm t, và vectơ sản phẩm cuối cùng năm (t+1) là x(t+1)=. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).**

Ta có A(t+1)=A(t); B(t+1)=B(t)

X(t+1) = [I – A(t+1)]-1.x(t+1) = =

Tính xij(t+1)ta áp dụng công thức : xij(t+1) = aij.Xj(t+1)

⇒ x11 = 162,987; x12 = 74,675; x13 =  ;

x21 =  ; x22 = ; x23 = 154,546 ;

x31 = 122,24; x32 = 18,67; x33 = 231,82 ;

Tính yij(t+1) ta áp dụng công thức : yij(t+1) = bij.Xj(t+1)

⇒ y11 = 40,749; y12 = ; y13 = 115,9085;

y21 = ; y22 = 56,0062; y23 = 38,6365;

y31 = ; y32 = ; y33 = 38,6365;

y41 = ; y42 = ; y43 = 38,6365;

y51 = 162,987; y52 = 74,675; y53 = .

Vậy bảng cân đối liên ngành năm (t+1) là :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị tổng sản lượng | Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian | | | Giá trị SPCC |
| 814,935 | 162,987 | 74,675 |  | 500 |
| 373,3766 |  |  | 154,546 | 100 |
| 772,73 | 122,24 | 18,67 | 231,82 | 400 |
| Nhập khẩu | 40,749 |  | 115,9085 |  |
| Lương |  | 56,0062 | 38,6365 |  |
| Khấu hao |  |  | 38,6365 |  |
| Thuế |  |  | 38,6365 |  |
| Lợi nhuận | 162,987 | 74,675 |  |  |

## Bài 30 :

**Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Giá trị Tổng sản lượng** | **Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian** | | | **Giá trị sản phẩm cuối cùng** |
| **1450** | **290** | **0** | **450** |  |
| **1990** | **145** | **199** | **150** |  |
| **1500** | **290** | **398** | **150** |  |
| **Nhập khẩu** | **72,5** | **398** | **150** |  |
| **Lương** | **145** | **298,5** | **150** |
| **Khấu hao** | **145** | **99,5** |  |
| **Thuế** | **72,5** | **199** | **150** |
| **Lợi nhuận** | **290** | **398** | **225** |

1. **Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng**

y33 = X3 – ()–y13–y23–y43–y53 = 1500–(450+150+150)–150-150-150-225 = 75

x1 = X1 - = 1450 – (290+0+450) = 710

x2 = X2 - = 1990 – (145+199+150) = 1496

x3 = X3 - = 1500 – (290+398+150) = 662

1. **Tính ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t**

a11 = ; a12 = ; a13 = ;  
a21 = ; a22 = ; a23 = ;

a31 = ; a32 = ; a33 = .

⇒ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

A =

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

C = (I - A)-1==

Ý nghĩa phần tử c23 = là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,1923.

1. **Tìm ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.**

b11 = ; b12 = ; b13 = ;

b21 = ; b22 = ; b23 = ;

b31 = ; b32 = ; b33 = ;

b41 = ; b42 = ; b43 = ;

b51 = ; b52 = ; b53 = ;

⇒ ma trận các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t là:

B =

Ý nghĩa kinh tế của phần tử b13 = 0,1 là: Để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành 3 thì ngành này phải sử dụng trực tiếp 0,1 đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ 1.

1. Ta có : Xj(t+1) = C. xj(t+1) = . =

Tính xij(t+1)ta áp dụng công thức : xij(t+1) = aij.Xj(t+1)

⇒ x11 = 383; x12 = 0 ; x13 = 533 ;

x21 = 191 ; x22 = ; x23 = 178 ;

x31 = 383; x32 = ; x33 = 178 ;

Tính yij(t+1) ta áp dụng công thức : yij(t+1) = bij.Xj(t+1)

⇒ y11 = 95,8 ; y12 = 415 ; y13 = 178 ;

y21 = 191,6; y22 = 311,5 ; y23 = 178 ;

y31 = 191,6; y32 = 103,8 ; y33 = 88 ;

y41 = 95,8 ; y42 = 207,7 ; y43 = 178 ;

y51 = 384,2 ; y52 = 415 ; y53 = 265.

Kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1) là :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị | Giá tị sản phẩm trao đổi trung gian | | | Giá trị SP cuối cùng |
| 1916 | 383 | 0 | 533 | 1000 |
| 2077 | 191 |  | 178 | 1500 |
| 1776 | 383 |  | 178 | 800 |
| Nhập khẩu | 95,8 | 415 | 178 |  |
| Lương | 191,6 | 311,5 | 178 |
| Khấu hao | 191,6 | 103,8 | 88 |
| Thuế | 95,8 | 207,7 | 178 |
| Lợi nhuận | 384,2 | 415 | 265 |

Bài 31: **Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp và chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t**

**A = ; C =**

1. **Hãy giải thích ý nghĩa của tổng các phần tử nằm trên cột 3 của ma trận A**

Ý nghĩa: Để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 3 thì ngành thứ nhất, thứ hai, thứ ba phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,75.

1. **Cho biết sang năm (t+1) các hệ số kỹ thuật không thay đổi, nếu mục tiêu giá trị sản phẩm dành cho nhu cầu cuối cùng ngành thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tăng 15; 10; 12 đơn vị giá trị thì giá trị sản lượng các ngành cần tăng thêm bao nhiêu đơn vị để đáp ứng mục tiêu đó.**

Theo đề bài, ta có: Δx =

Mặc khác: Xj = [I – Aij]-1. xij = C.xij

⇔ ΔXj = C.Δxij = . =

Bài 32: **Cho bảng cân đối liên ngành năm t như sau:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Giá trị** | **Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian** | | | **Giá trị SP cuối cùng** |
| **250** | **50** | **35** | **30** | **x1** |
| **180** | **x21** | **25** | **35** | **95** |
| **150** | **40** | **25** | **30** | **95** |
| **Nhập khẩu** | **10** | **y12** | **5** |  |
| **Tiền lương** | **30** | **15** | **20** |
| **Khấu hao** | **y31** | **10** | **5** |
| **Thuế** | **20** | **10** | **10** |
| **Lợi nhuận** | **65** | **50** | **15** |

1. **Hãy tìm các số liệu còn thiếu trong bảng trên và tính ma trận hệ số kỹ thuật, giải thích ý nghĩa kinh tế của a32**.

x21 = 180 – (25+35+95) = 25

x1 = 250 – (50+35+30) = 135

y12 = 180 – (35+25+25+15+10+10+50) =10

y31 = 250 – (50+25+40+10+30+20+65) = 10  
Ta đi tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp

a11 = ; a12 = ; a13 = ;  
a21 = ; a22 = ; a23 = ;

a31 = ; a32 = ; a33 = .

⇒ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

A =

Ý nghĩa kinh tế của a32 = là: Để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 2 thì ngành 3 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,139.

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

C = (I - A)-1==

1. **Cho x(t+1)= (), các hệ số khác không đổi. Hãy lập kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1).**

Ta có : Xj(t+1) = C. xj(t+1) = . =

Tính xij(t+1)ta áp dụng công thức : xij(t+1) = aij.Xj(t+1)

⇒ x11 = 66,685; x12 = 45,2912; x13 = 41,4498;

x21 = ; x22 = 32,451; x23 = 47,667 ;

x31 = 53,3482; x32 = 32,451; x33 = 41,4498 ;

Tính yij(t+1) ta áp dụng công thức : yij(t+1) = bij.Xj(t+1)

Với bij= ta có : B =

⇒ y11 = 13,337; y12 = 12,97; y13 = 7;

y21 = 40; y22 = 19,5; y23 = 28;

y31 = 13,337; y32 = 12,97; y33 = 7;

y41 = 26,674; y42 = 12,97; y43 = 13,9575;

y51 = 86,7034; y52 = 64,8568; y53 = .

Kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1) là :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị | Giá tị sản phẩm trao đổi trung gian | | | Giá trị SP cuối cùng |
| 333,4266 | 66,685 | 45,2912 | 41,4498 | 180 |
| 233,46 |  | 32,451 | 47,667 | 120 |
| 207,249 | 53,3482 | 32,451 | 41,4498 | 80 |
| Nhập khẩu | 13,337 | 12,97 | 7 |  |
| Lương | 40, | 19,5 | 28 |
| Khấu hao | 13,337 | 12,97 | 7 |
| Thuế | 26,674 | 12,97 | 13,9575 |
| Lợi nhuận | 86,7034 | 64,8568 |  |

Bài 33: **Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:**

**C=**

1. **Cho các giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (3000; 2800; 4000). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị của các ngành?**
2. **Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3;4;8). Trong năm (t+1) theo dự báo thì chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp là (1,05; 1,1;1,2;1,15), tính giá 1 đơn vị sản phẩm ngành năm (t+1)?**

**Giải:**

1. C= (I3 –A)-1 ⇨ I3 –A=C-1=

⇨

X(t)=(3000;28000;4000)

x(t)=X(t)×(I3- A)=

* Bảng cân đối liên ngành

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị tổng sản lượng | GT sản phẩm trao đổi trung gian | | | Giá trị sản phẩm cung cấp |
| 3000 | 450 | 280 | 800 | 1470 |
| 2800 | 900 | 560 | 600 | 740 |
| 4000 | 300 | 560 | 400 | 2740 |
| Nhập khẩu | 300 | 420 | 600 |  |
| Tiền lương | 300 | 280 | 800 |
| Khấu hao | 300 | 420 | 400 |
| Thuế | 450 | 280 | 400 |

1. wT = (1,05; 1,1; 1,2; 1,15)

KT = wT.B.C=(0,5075; 0,5625; 0,6125) .

= (1,125; 1,23; 1,118)

⇒ Giá một đơn vị sản phẩm các ngành năm (t+1) là: Pj(t+1) = Pj(t).Kj

P1(t+1) = P1(t).K1 = 3.1,125 = 3,375

P2(t+1) = P2(t).K2 = 4.1,23 = 4,492

P3(t+1) = P3(t).K3 = 8.1,118 = 8,944

Vậy giá một đơn vị sản phẩm các ngành năm (t+1) là: (3,375 ; 4,492 ; 8,944).

Bài 34: **Ma trận hệ số chi phí trực tiếp A, ma trận hệ số yếu tố đầu vào sơ cấp B dạng giá trị năm t:**

**A=; B=**

1. **Cho giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (1500;2500;3200). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t?**
2. **Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (2;3;5). Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t và ý nghĩa của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3 của ma trận đó?**

**Giải:**

1. I3-A=

x(t)=(I3-A).X(t)=

xij(t)=aij.X(t)

* Bảng cân đối liên ngành

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị tổng sản phẩm | Giá trị sản phẩm trao đổi | | | Giá trị SPCC |
| 1500 | 225 | 250 | 625 | 225 |
| 2500 | 300 | 500 | 250 | 1380 |
| 3200 | 150 | 250 | 375 | 2320 |
| Nhập khẩu | 300 | 375 | 320 |  |
| Lương | 150 | 500 | 320 |
| Khấu hao | 150 | 375 | 320 |
| Thuế | 225 | 250 | 320 |

1. Ta có giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là:

(P1; P2; P3) = (2; 3; 5).

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t

Ta có: αij = = aij.

⇒ α11 = a11. = 0,15. = 0,15 ; α12 = a12. = 0,1. = 0,15 ;

α21 = a21. = 0,2. = 0,133 ; α22 = a22. = 0,2. = 0,2 ;

α31 = a31. = 0,1. = 0,04 ; α32 = a32. = 0,1. = 0,06 ;

α13 = a13. = 0,25. = 0,625 ; α23 = a23. = 0,1. = 0,167;

α33 = a33. = 0,15. = 0,15.

Vậy ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t là

α =

Hệ số α23 cho biết để ngành thứ 3 sản xuất được 1 đơn vị sản phẩm, thì ngành thứ 2 phải cung cấp cho nó 0,167 đơn vị sản phẩm dưới dạng tư liệu sản xuất.

Bài 35: **Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:**

**B=; C=**

1. **Biết giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (5000;3000;6500). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t?**
2. **trong năm (t+1) các yếu tố kĩ thuật , kinh tế không đổi. Biết chỉ số giá của các yếu tố đầu vào sơ cấp của các ngành được dự báo làn lượt là (1,5;1,2;1,1;2) và giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3;4;5;2). Hãy tính sự biến động giá của năm (t+1) so với năm t?**

**Giải:**

1. I3-A= C-1=

⇨A=

x(t)= X(t).(I-A)=

xij(t)=aij.X(t)

yij(t)=bij.X(t)

* bảng cân đối liên ngành

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Giá trị tổng sản lượng | Giá trị sản phẩm trao đổi | | | Giá trị SPCC |
| 5000 | 500 | 600 | 975 | 2925 |
| 3000 | 750 | 300 | 975 | 975 |
| 6500 | 250 | 300 | 1300 | 4650 |
| Nhập khẩu | 1000 | 500 | 650 |  |
| Lương | 1250 | 1000 | 975 |
| Khấu hao | 250 | 1000 | 975 |
| Thuế | 1000 | 500 | 650 |

1. Ta có giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là:

(P1; P2; P3) = (3; 4,5; 2)

Chỉ số giá của các yếu tố đầu vào sơ cấp của các ngành năm (t+1) là: wT = (1,5; 1,2; 1,1; 2).

Mặc khác:

KT = wT.B.C

= (1,055; 0,81; 0,695).

= (1,481; 1,385; 1,406)

⇒ Sự biến động giá của năm (t+1) so với năm t:

ΔPj = Pj(t+1) – Pj(t) = Pj(t).Kj – Pj(t) = Pj(t).(Kj – 1)

⇒ ΔP1 = P1(t).(K1 – 1) = 3.(1,481 – 1) = 1,443

ΔP2 = P2(t).(K2 – 1) = 4,5.(1,385 – 1) = 1,7325

ΔP3 = P3(t).(K3 – 1) = 2.(1,406 – 1) = 0,812.

# Chương III :

# QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

## Bài 1: Lập mô hình bài toán

1.1**.** **Nhân dịp tết trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh "Trăng" muốn sản xuất 3 loại bánh :**

**đậu xanh, thập cẩm và bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất 3 loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, đậu, bột, trứng, mứt, lạp xưởng, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 500kg, đậu là 300kg, các nguyên liệu khác muốn bao nhiêu cũng có. Lượng đường, đậu**

**cần thiết và lợi nhuận thu được trên một cái bánh mỗi loại cho trong bảng sau**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bánh**  **Nguyên liệu** | **Bánh đậu**  **xanh** | **Bánh thập**  **cẩm** | **Bánh dẻo** |
| **Đường (g)** | **60** | **40** | **70** |
| **Đậu (g)** | **80** | **0** | **40** |
| **Lợi nhuận (đồng)** | **2000** | **1700** | **1800** |

**Cần lập kế hoạch sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường,**

**đậu và tổng lợi nhuận thu được là lớn nhất nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết.**

**Giải:**

Gọi là x1 là số bánh đậu xanh; x2 là số bánh thập cẩm; x3 l à số bánh dẻo nhân đậu xanh. Khi đó 2 hàm mục ti êu l à: f(x) = 2000x1 + 1700x2 + 1800x3 max

Các ràng buộc:

1.2**. Một xí nghiệp dệt hiện có 3 loại sợi : Cotton, Katé, Polyester với khối lượng tương**

**ứng là 3; 2,5; 4,2 (tấn). Các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn. Xí nghiệp có thể sản xuất ra 3 loại vải A, B, C (với khổ bề rộng nhất định) với mức tiêu hao các loại sợi để sản**

**xuất ra một mét vải các loại cho trong bảng sau**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Loại vải**  **Loại sợi (g)** | **A** | **B** | **C** |
| **Cotton** | **200** | **200** | **100** |
| **Katé** | **100** | **200** | **100** |
| **polyester** | **100** | **100** | **200** |

**Biết lợi nhuận thu được khi sản xuất một mét vải các loại A, B, C tương ứng là 350, 480,**

**250 (đồng). Sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết với số lượng không hạn chế, nhưng tỷ lệ về số mét vải của B và C phải là 1 : 2.**

**Hãy xây dựng bài toán tìm kế hoạch sản xuất tối ưu.**

**Giải:**

Gọi x1 , x2, x3 lần lượt là số mét vả A, B, C cần sản xuất,

Tổng lợi nhuận thu được f= 350x1 + 480x2 +250x3(đồng) max

xj 0,j =

1.3**.**

**Một trại chăn nuôi định nuôi 3 loại bò : bò sữa, bò cày và bò thịt. Số liệu điều tra**

**được cho trong bảng sau, với đơn vị tính là ngàn đồng / con.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Loại bò**  **Chi phí** | **Bò sữa** | **Bò cày** | **Bò thịt** | **Dự trữ** |
| **Vốn** | **123** | **127** | **162** | **7020** |
| **Chi phí chăn nuôi** | **18** | **15** | **15** | **800** |
| **Lời** | **59** | **49** | **57** |  |

**Tìm số bò mỗi loại cần nuôi sao cho tổng tiền lời là lớn nhất. Biết rằng số bò sữa**

**không quá 18 con.**

**Giải:**

Gọi x1, x2, x3 lần lượt là bò sữa, bò cày, bò thịt

Ta có:

F(x) :

1.4**.** **Một đội sản xuất dự định dùng 31 sào đất để trồng bắp cải, cà chua, đậu, khoai tây, hành. Các số liệu cho trong bảng sau**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tài nguyên** | **Dự**  **trữ** | **Bắp cải** | **Cà chua** | **Đậu** | **Khoai tây** | **Hành** |
| **Lao động**  **(công/sào)** | **1892** | **79** | **55** | **23** | **26** | **35** |
| **Chi phí**  **(ngàn đồng/sào)** | **1828** | **38** | **22** | **31** | **63** | **50** |
| **Lời**  **(ngàn đồng/sào)** |  | **376** | **128** | **104** | **177** | **310** |

**Giải:**

Gọi lần lượt là số sào đất để trồng bắp cải, cà chua, đậu, khoai tây, hành.

Vì sô sào đất không thể trồng là số âm nên ta có các điều kiện:

Xj 0, j =

Tổng lời thu được là :

f(x) =

Do số lượng lao động và chi phí không thể vượt qua số lượng hiện có nên :

Tổng sô sào đất hiện có:

Ta có bài toán :

f(x) = 376x1 + 128x2 + 104x3 +177x4 + 310x5 max

### 1.5

**Để sản xuất 3 loại sản phẩm I, II, III, người ta cần dùng 4 loại nguyên liệu N1 , N2 ,**

**N3 , N4 , với các số liệu được cho trong bảng sau**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Nguyên liệu** | **Dự trữ** | **Sản phẩm I** | **Sản phẩm II** | **Sản phẩm III** |
| **N1** | **22** | **2** | **3** | **1** |
| **N2** | **16** | **2** | **1** | **0** |
| **N3** | **18** | **0** | **0** | **3** |
| **N4** | **21** | **3** | **3** | **4** |
| **Thu nhập** |  | **7** | **5** | **6** |

**Tìm phương án phân phối sản xuất sao cho tổng thu nhập của xí nghiệp là lớn nhất.**

**Giải:**

Gọi x1, x2, x3 lần lượt là số sản phẩm xí nghiệp sx

Ta có hàm mục tiêu f(x) = 7x1 + 5x2 + 6x3 min

Đưa về dạng chính tăc :

Bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 22 | 2 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 16 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x6 | 18 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x­7 | 21 | 3 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| f(x) | 0 | 7 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối cùng có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất là 7 và phần tử trục xoay là hàng thứ 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 8 | 0 | 1 | - | 1 | 0 | 0 | - |
| x5 | 2 | 0 | -1 | - | 0 | 1 | 0 | - |
| x6 | 18 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x1 | 7 | 1 | 1 |  | 0 | 0 | 0 |  |
| f(x) | -49 | 0 | -2 | - | 0 | 0 | 0 | - |

Vậy phương án tối ưu là (7, 0, 0) với fmax = 49

1.6**.** **Một chủ nông trại có quyền sở hữu 100 mẫu đất dự định trồng 3 loại cây A, B, C.**

**Chi phí hạt giống tương ứng cho 3 loại cây A, B, C là 40$, 20$, 30$. Số tiền tối đa có thể chi cho việc mua hạt giống là 3200$. Số ngày công chăm sóc cho các loại cây A, B, C trên một mẫu tương ứng là 1, 2, 1. Số ngày công tối đa có thể có là 160. Nếu lợi nhuận trên một mẫu của mỗi loại cây cho bởi : A là 100$, B là 300$, C là 200$, thì phải trồng mỗi loại cây bao nhiêu mẫu để thu lợi nhuận tối đa.**

**Giải:**

Gọi x1, x2, x3 lần lượt là số mẫu đất trồng loại cây A, B, C

Ta có hàm mục tiêu: f(x) = 100x1 + 300x2 + 200x3

Rút gọn: f(x) = 1x1 + 3x2 + 2x3 max

Các ràng buộc:

Đưa về dạng chính tắc:

Đặt g(x) = -f(x) = -x1 -3x2 - 2x3 +Mx6 min

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0 | -1 | -3 | -2 | 0 | 0 |
| SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 0 | x4 | 320 | 4 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | x5 | 160 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| M | x6 | 100 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 |
|  |  | 100 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Trên dòng cuối cùng ta chọn phần tử ở cột thứ 2

Trên cột đó ta chọn phần tử trục xoay ở dòng thứ 2

Ta có bảng đơn hình:

D2 ; d1;d3;d4 d5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x4 | 160 | 3 | 0 | 2 | 1 | -1 |
| x2 | 80 |  | 1 |  | 0 |  |
| x6 | 20 |  | 0 |  | 0 |  |
|  | -240 |  | 0 |  | 0 |  |
|  | 20 |  | 0 |  | 0 |  |

Trên dòng cuôi cùng ta chọn phần tử ở cột thứ 3, trên cột đó ta chọn phần tử ở dòng 3

Ta có bảng đơn hình sau :

;; ;

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x4 | 80 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| x2 | 60 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x3 | 40 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 |
|  | -260 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Trên dòng 4 các phần tử đều <0

Bài toán có phương án tối ưu là x = (0,60,40) với f(x) = 26000

1.7**.** **Một hãng sản xuất máy vi tính có hai phân xưởng lắp ráp A, B và hai đại lý phân phối I, II. Xưởng A có thể ráp tối đa 700 máy/tháng và xưởng B ráp tối đa 900 máy/tháng. Đại lý I tiêu thụ ít nhất 500 máy/tháng và đại lý II tiêu thụ ít nhất 1000 máy/tháng. Cước phí vận chuyển một máy từ các xưởng đến các đại lý cho trong bảng sau**

|  | **Đại lý I** | **Đại lý II** |
| --- | --- | --- |
| **Xưởng A** | **6$** | **5$** |
| **Xưởng B** | **4$** | **6$** |

**Tìm kế hoạch vận chuyển tối ưu để tổng cước phí vận chuyển máy từ các xưởng**

**đến các đại lý phân phối cực tiểu.**

**Giải:**

Gọi X1 là số máy từ xưởng A đến đại lý

Gọi X2 là số máy từ xưởng B đến đại lý

Gọi X3 là số máy từ xưởng A đến đại lý

Gọi X4 là số máy từ xưởng B đến đại lý

f(x) = 6x1 + 4x2 + 5x3 + 8x4 min

Bài tập dạng chính tắc

Dạng (M)

(x)= 6x1 + 4x2 + 5x3 + 8x4 + Mx9 + Mx10 min

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0 | 6 | 4 | 5 | 8 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | |
| 0 | x5 | 700 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | x6 | 900 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| M | x9 | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | |
| M | x10 | 1000 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | |
|  |  | 0 | -6 | -4 | -5 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |
|  |  | 1500 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | |

Chọn cột x2 (do M-4 lớn nhất), ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (500<900), thực hiện phép đổi (2)(2)-(3); (5)(5) + 4(3); (6)(6)-(3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x5 | 700 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 400 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x2 | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x10 | 1000 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|  | 2000 | -2 | 0 | -5 | -8 | 0 | 0 | -4 | 0 |
|  | 1000 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |

(4)(4)-(1); (5)(5)+5(1); (6) (6)-(1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x3 | 700 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 400 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x2 | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x10 | 300 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 |
|  | 5500 | 3 | 0 | 0 | -8 | 5 | 0 | -4 | 0 |
|  | 300 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 |

(2)(2)-(4); (5)(5)+8(4); (6) (6)-(4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x3 | 700 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 100 | -0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| x2 | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x4 | 300 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 |
|  | 7900 | -5 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | -4 | 8 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x3 | 700 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| x2 | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x4 | 300 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 |
| f | 7900 | -5 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | -4 | 8 |

Vậy bài toán có phương án tối ưu (0; 500; 700; 300; 0; 100; 0; 0)

### 1.8

**Có 2 nơi cung cấp khoai tây I và II theo khối lượng lần lượt là 100 tấn và 200 tấn. Có**

**3 nơi tiêu thụ khoai tây: A, B, C với yêu cầu tương ứng là 75 tấn, 125 tấn và 100 tấn. Cước phí vận chuyển (ngàn/tấn) vận chuyển từ các nơi cung cấp đến nơi tiêu thụ được**

**cho trong bảng sau**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Tiêu thụ**  **Cung cấp** | **A** | **B** | **C** |
| **I** | **10** | **14** | **30** |
| **II** | **12** | **20** | **17** |

**M uốn chuyên chở khoai tây với tổng cước phí nhỏ nhất. Lập mô hình bài toán.**

**Giải:**

Gọi xij là lượng khoai tây vận chuyển từ nơi cung cấp tới nơi tiêu thụ.

(i = , ; j = A, B, C; xij 0)

Hàm mục tiêu là tổng ước phi vận chuyển.

f(x) = 10xІA + 14 xІB + 30 xІC +12 xІІA +17 xІІB min

### 1.9

**Một người có số tiền là 100 tỷ đồng dự định đầu tư vào các loại hình sau đây:**

**• Gửi tiết kiệm không kỳ hạn với suất là 6,5%/năm.**

**• Gửi tiết kiệm có kỳ hạn với lãi suất 8,7%/năm.**

**• Mua tín phiếu với lãi suất là 10%/năm.**

**• Cho doanh nghiệp tư nhân vay với lãi suất lá 13%/năm.**

**Để tránh rủi ro, người này quyết định đầu tư theo các chỉ dẫn của nhà tư vấn đầu tư như**

**sa u :**

**• Không cho doanh nghiệp tư nhân vay quá 20% số vốn.**

**• Số tiền mua tín phiếu không vượt quá tổng số tiền đầu tư vào 3 loại hình kia**

**• Đầu tư ít nhất là 30% tổng số tiền vào gửi tiết kiệm có kỳ hạn và mua tín phiếu.**

**• Tỷ lệ tiền gửi tiết kiệm không kỳ hạn trên tiền tiết liệm có kỳ hạn không quá 1/3.**

**• Người này cho vay toàn bộ số tiền.**

**Hãy lập mô hình toán , xác định phương án đầu tư tối ưu để người này đạt được lợi**

**nhuận cao nhất, theo đúng chỉ dẫn của nhà đầu tư.**

**Giải:**

Gọi x1, x2, x3, x4 lần lượt là số lãi suất của phương án 1,2,3,4

Hàm mục tiêu:

f(x) = 5,6 x1 + 8,7x2 + 10x3 + 13x4 max

Ràng buộc:

xij 0; j =

### 1.10.

**Một công ty có kế hoạch quảng cáo một loại sản phẩm do công ty sản xuất trong**

**thời gian một tháng với tổng chi phí là 100 triệu đồng. Các phương tiện được chọn để quảng cáo sản phẩm là : truyền hình, báo và phát thanh với số liệu được cho bởi bảng sau**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Phương tiện**  **quảng cáo** | **Chi phí mỗi**  **lần quảng cáo**  **(triệu đồng)** | **Số lần quảng cáo**  **tối đa trong tháng** | **Dự đoán số người xem trong mỗi tháng** |
| **Truyền hình**  **(1 phút)** | **1,5** | **60** | **15000** |
| **Báo**  **(1/2 phút)** | **1** | **26** | **30000** |
| **Phát thanh**  **(1 phút)** | **0,5** | **90** | **9000** |

**Vì lý do chiến lược tiếp thị nên công ty yêu cầu phải có ít nhất 30 lần quảng cáo**

**trên truyền hình trong tháng. Hãy lập mô hình bài toán sao cho phương án quảng cáo sản**

**phẩm của công ty là tối ưu ?**

**Giải:**

Gọi x1, x2, x3 lần lượt là số quảng cáo trên truyền hình, báo và phát thanh.

Mô hình bài toán là:

Hàm mục tiêu: f(x) = 15x1 + 30x2 + 9x3 max

Đặt g(x) = -f(x) = -15x1 - 30x2 - 9x3min

Dạng chuẩn

Dạng (M)

Hàm mục tiêu g(x) = -15x1 - 30x2 - 9x3 + M x9 => min

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0 | -15 | -30 | -9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| SHTD | x1 | x2 | x3 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
| 0 | x8 | 100 | 1.5 | 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| M | x9 | 30 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x5 | 60 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x6 | 26 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 90 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | g(x) | 0 | 15 | 30 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Phương án cực biên g(x)min= 0 khi(0;0;0;0;60;26;90;100;0)

Hàng cuối cùng có 1 số dương trên cột này có hai số dương chọn phần tử trục xoay là hàng 2 vì tỉ số 30/1 là nhỏ nhất

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x4 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x8 | 55 | 0 | 1 | 0.5 | 1.5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x1 | 30 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 30 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 26 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 90 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| g(x) | -450 | 0 | 30 | 9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Dòng cuối có 3 số dương chọn cột 3 chọn hàng 4 làm phần tử trục xoay vì tỉ số 26/1 nhỏ nhất

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x8 | 29 | 0 | 0 | 0.5 | 1.5 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| x1 | 30 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 30 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 26 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 90 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| g(x) | -1230 | 0 | 0 | 9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Dòng cuối có 2 số dương trên cột 4 dòng này chọn phần tử trục xoay là dòng 1 vì tỉ số 26/0.5 là nhỏ nhất

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x3 | 58 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | -2 | 0 | 1 |
| x1 | 30 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 30 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 26 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 90 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 2 | 1 | -2 |
| g(x) | -1752 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | -12 | 0 | 8 |

Dòng cuối cùng không có số dương nào

g(x)min = -1752 khi (30;26;58;0;30)

* f(x)max = 1752 khi (0; 30;26;58).

## Bài 2: Đưa các bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc

### Bài 2.1

**f(x) = x1 + x2 + x3 → min**

**x1 – x3 ≤ 1**

**x2 + x3 ≥ 1 (x1 ≥ 0)**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ min

### Bài 2.2

**f(x) = 3x1 - 2x2 + 4x3 → max**

**2x1 + x2 – x3 ≥ 1**

**-4x1 + 3x2 + x3 ≤ 2 x1 ≥ 0 ; x2 ≤ 0**

**x1 – 2x3  = 4**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ max

### Bài 2.3

**f(x) = x1 - x2 - 2x3 - x4→ min**

**x1 + x2 – x4 ≤ 1**

**-x1 + x2 + x4 ≤ 3 x1 , x2 ≥ 0**

**x2 + x3  = 1**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ min

### Bài 2.4

**f(x) = -2x1 + x2 + 4x3 + 5x4→ min**

**x1 - 3x2 + 5x3 – 3x4 ≤ 16**

**2x1 - x2 - 2x3 + 2x4 ≥ -8 x1 , x2 ≥ 0 , x3 ≤ 0**

**4x1 + 3x2 + x3  + x4 = 8**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ min

### Bài 2.5

**f(x) = 8x1 + 7x2 + 6x3 → max**

**x1 + 2x2 + x3 = 2**

**2x1 + x2 + x3 = 1 x1 ≤ 0 ; x2, x3**

**x1 + 5x2 +2x3  ≤ 6**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ max

### Bài 2.6

**f(x) = x1 - 2x2 + x3 - 2x4→ max**

**x1 + x2 + x3 + x4 = 2**

**-x1 + x3 + 2x4 = 1 x1, x4 ≤ 0 ; x2, x3 ≥ 0**

**Giải :**

Đặt

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

**→** max

### Bài 2.7

**f(x) = 6x1 + 8x2 + 8x3 → min**

**x1 + 4x2 + x3 ≤ 5**

**x1 - x2 + 2x3 ≥ 6 , x2 ≤ 0, x3  ≥ 0**

**x1 + 2x2 +x3  ≥ -7**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

**→** min

Bài 2.8 **f(x) = 4x1 + 8x2 + 6x3 → min**

**3x1 + 6x2 + 7x3 ≥ 70**

**5x1 + 9x2 + 3x3 ≤ 50**  **xj  0 ; j = 1,3**

**2x1 + 8x2 + 4x3  ≤ 60**

**Giải :**

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

3x1 + 6x2 + 7x3 - x4  = 70

5x1 + 9x2 + 3x3 + x5 = 50 xj  0 ; j = 1,6

2x1 + 8x2 + 4x3 + x6 = 60

### Bài 2.9

**f(x) = 2x1 + x2 → max**

**6x1 + 7x2 ≤ 84**

**2x1 + 3x2 ≤ 24**  **0 ≤ x1 ≤ 6, 0 ≤ x2 ≤ 7**

**4x1 + 3x2 ≤ 36**

**Giải :**

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

6x1 + 7x2 + x3 = 84

2x1 + 3x2 + x4 = 24

4x1 + 3x2 + x5 = 36 xj  0 ; j = 1,8

x1 + x7 = 6

x2  + x8 = 7

### Bài 2.10

**f(x) = 2x1 + x2 + x4 → max**

**3x1 + 4x2 + x3 + 2x4 ≤ 4**

**x1 + 2x2 + 3x3 + x4 = 3**  **xj  0 ; j = 1,4**

**2x1 + 5x2 + 4x3 + 5x4 ≥ 2**

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

3x1 + 4x2 + x3 + 2x4 + x5 = 4

x1 + 2x2 + 3x3 + x4 = 3 xj  0 ; j = 1,6

2x1 + 5x2 + 4x3 + 5x4 - x6  = 2

### Bài 2.11

**f(x) = 8x1 + 7x2 + 6x4 → min**

**x1 + 2x2 + x3 = 2**

**2x1 + x2 + x3 = 1 x1 ≤ 0 ; x2 ∈ R, x3 ≥ 0**

**Giải :**

Đặt :

, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

→ min

## Bài 3 : Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp hình học

3.1 f(x) = 2x1 + x2  🡪 max

2x1 + x2 ≥ 2

-x1 + 2 x2  ≤ 6

5x1 - x2 ≤ 15

xi ≥ 0 , i= 1,2.

2x1 + x2=2(1) -x1+2x2=6(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | -6 |
| X2 | 3 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 1 |
| X2 | 2 | 0 |

5x1-x2=15(3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 3 |
| X2 | -15 | 0 |

x2

x1

0

-6

-15

3

2

3

(2)

(L)

(1)

(L0)

(3)

(D)

f(x)=2x1+x2🡪max

(2;1). Vẽ L0 vuông tại 0. Từ một điểm D ta vẽ L // L0, f🡪max

A=(2) ∩(3) 🡪A(4;5)

Bài toán có phương án tối ưu với(4;5), fmax=13

3.2 f(x) = x1 + 2x2  🡪 min

6x1 + x2 ≥ 18

x1 + 4x2  ≥ 12

2x1 + x2 ≥ 10

xi ≥ 0 i=1,2

6x1+x2=18(1) x1+4x2=12(2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 3 |  | X1 | 0 | 12 |
| X2 | 18 | 0 |  | X2 | 3 | 0 |

2x1+x2=10(3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 5 |
| X2 | 10 | 0 |

5

f(x)=x1+2x2🡪min(max)

(1;2). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0

f🡪min, A=(1)∩(2)🡪A (. Phương án tối ưu với (.fmin=

f🡪max,B=(3)∩(1)🡪B(2;6). Phương án tối ưu với (2;6),fmax=14

3.3 f(x) = 3x1  + 2x2 🡪 max

2x1 +x2 ≤ 5

x1 – x2 ≤ 1

x1 +x2 ≤ 3

x1,x2 ≤ 0

2x1 +x2 =5(1) x1 – x2 = 1(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 5/2 |
| X2 | 5 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 1 |
| X2 | -1 | 0 |

x1 +x2 = 3(3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 3 |
| X2 | 3 | 0 |

x2

5x2

3x1

3(1)

5/2(D)

1 (L)

-1(Lo)

(1)(3)

(3)(2)

(2) 3

(Lo) 3

0 10

x1 0

(D)18

(L) 12

f(x) = 3x1  + 2x2 🡪 max

(3;2). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0 mà L0 cũng D nên L L0. fmax🡪A=(2)∩(3),A(2;1). Phương án tối ưu với (2;1),fmax=8

3.4 f(x) = 2x+5x 🡪 min

x1 + 2x2 ≤ 3

x1 - x2 ≤ 4

x1,x2 ≥ 0

x1 + 2x2 = 3(1) x1 - x2 = 4(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 3 |
| X2 | 3/2 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 4 |
| X2 | -4 | 0 |

X2

(D)

4

3

3/2)

(2)

(1)

0

X1

(L)

(Lo)

f(x) = 2x+5x 🡪 min

(3;5). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0 mà L0 cũng D nên L L0. fmin🡪A O. Phương án tối ưu với (0;0) fmin=0

3.5 f(x) = 4x+3x 🡪 max

x1 - 2x2 ≤ 4

-2x1 + x2  ≤ 3

x1 + x2  ≥ 10  
 x1,x2 ≥ 0

x1 - 2x2 = 4(1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 4 |
| X2 | -2 | 0 |

-2x1 + x2  = 3(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | -3/2 |
| X2 | 3 | 0 |

x1 + x2  = 10(3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 10 |
| X2 | 10 | 0 |

x2

0

3

10

-2

4

10

(2)

(Lo)

(1)

(L)

x1

(D)

(3)

f(x) = 4x+3x 🡪 max

(4;3). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0

f🡪+∞ bài toán không có phương án tối ưu.

3.6 f(x) = 3x+7x 🡪 min

2x1+4x2  ≥ 5

3x1+x2  ≥ 4

4x1+5x2 ≥ 8

x1,x2 ≥ 0

2x1+4x2  = 5(1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 5/2 |
| X2 | 5/4 | 0 |

3x1+x2  = 4(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 4/3 |
| X2 | 4 | 0 |

4x1+5x2 =8(3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 2 |
| X2 | 8/5 | 0 |

x2

4/3

0

8/5

(1)

(3)

(2)

(Lo)

(L)

x1

5/4

4

(D)

5/2

2

f(x) = 3x+7x 🡪 min

(3;7). ). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0 . fmin🡪A=(1)∩(2)

A (;).phương án tối ưu với (;), fmin=

3.7. Gọi x1,x2 lần lượt số lượng máy bay loại A,B cần thuê.

f(x)=10x1+9x2🡪min

200x1+100x2 ≥1400

6x1+15x2 ≥90

4≤x1 ≤ 9

x2≤10

x1,x2 nguyên dương

200x1+100x2 =1400(1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 7 |
| X2 | 14 | 0 |

6x1+15x2 =90(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 15 |
| X2 | 6 | 0 |

x2

(D)

(L)

(1)

(2)

14

10

6

9

7

4

0

(Lo)

x1

f(x)=10x1+9x2🡪min

(2;1). ). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0 . fmin🡪A=(2)∩(1), A(5;4).phương án tối ưu với (5;4),fmin=86

3.8 Gọi x1,x2 lần lượt là số sản phẩm loại I,II

f(x)=4000x1=3000x2🡪max

2x1+4x2 ≤200

30x1+15x2 ≤1200

X1,x2 nguyên dương

2x1+4x2 =200(1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 100 |
| X2 | 50 | 0 |

30x1+15x2 =1200(2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | 0 | 40 |
| X2 | 80 | 0 |

x2

100

40

50

80

(Lo)

(1)

(2)

x1

(D)

(L)

0

f(x)=4000x1=3000x2🡪max

(4;3). ). Vẽ L0 vuông . Từ một điểm D ta vẽ L // L0 mà L0 cũng D nên L L0. f🡪max 🡪A=(1)∩(2),A(20;40). Phương án tối ưu với (20;40),fmax=200000

## Bài 4: Chứng minh bài toán giải được, tìm phương án, phương án cực biên, phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

4.1**.** **Cho bài toán**

**f(x) = 4x1 - 2x2 + 3x3 + 3x4 ⭢ min**

**x1 + 2x2 + x3 - 3x4 ≤ 10**

**x1 – x2 + x3 – x4 ≤ 6**

**2x1 + x2 + 3x3 ≤ 8**

**xj ≥ 0, j = 1,4**

**Chứng minh bài toán trên giải được.**

**Giải:**

Dễ thấy x0 = (0;5;0;0) là một phương án do thỏa diều kiện:

0+2.5+0-3.0=10

0-5+0-0=-5≤6

2.0-5-3.0=-5≤8

Mặc khác: 2x1 + x2 + 3x3 ≤ 8 ⇒ x2 + (2x1+3x3) ≤ 8 ⇒ x2 ≤ 8 ⇒ -2x2 ≥ -16

🢡 f(x) = 4x1 - 2x2 + 3x3 + 3x4 ≥ -16 (xj ≥ 0, j = 1,4)

Vậy f(x) bị chặn dưới.

Bài toán (min) giải được.

4.2**.** **Cho bài toán  
f(x) = 2x1 + x2 - x3 + 3x4 ⭢ min**

**x1 – 2x2 + x3 = 16**

**x2 – 4x3 + x4 ≤ 8**

**-x2 + 2x3 – 3x4 ≤ 20**

**xj ≥ 0, j = 1,4**

**Vectơ x0 = (6;0;10;0) có phải là phương án, phương án cực biên.**

**Giải:**

Xét vectơxo = (6,0,10,0) là phương án khi thỏa hệ ràng buộc của bài toán.

x1 - 2x2 + 3x3 = 6 - 2.0 +10 = 16 (thỏa chặt)

x2 -  4x3 +x4 = 0 - 4.10 + 0 = -40 < 8 (thỏa lỏng)

-x2 + 2x3 - 3x4 = 0 + 2.10 - 3.0 = 20 (thỏa chặt)

x1 = 6 > 0 (thỏa lỏng)

x2 = 0 (thỏa chặt)

x3 = 10 > 0 (thỏa lỏng)

x4 = 0 (thỏa chặt)

Ta thấy các ràng buộc trên đều thỏa nênx0 là phương án của bài toán. Trong đó có 4 ràng buộc thỏa chặt.

Ta chứng minh được 4 ràng buộc này độc lập tuyến tính vì:

Từ ràng buộc chung thứ 1 ta có vectơ*u*1 = (1;-2;1;0).

Từ ràng buộc chung thứ 2 ta có véctơ*u*2 = (0;1;-4;1).

Từ ràng buộc biến thứ 2 ta có vectơ*u*3 = (0;1;0;0).

Từ ràng buộc biến thứ 4 ta có vectơ *u4* = (0;0;0;1).

Ta có: k1*u*1 + k2*u*2 + k3*u*3 + k4*u*4 = 0

k1 = 0

|  |
| --- |
| k1 = k2 = k3 = k4 = 0 |

-2k1 + k2 +k3 = 0

k1 – 4k2 = 0

k2 + k4 =0

Vậy các vectơ này độc lập tuyến tính.

Vậy x0 = (6;0;10;0) là phương án cực biên.

Bài toán có 4 biến nên n=4. Số ràng buộc thỏa chặt độc lập tuyến tính bằng số tiền bằng 4. Vậy x0 là phương án cực biên không suy biến.

4.3**.** **Cho bài toán sau**

**f(x) = *x*1 + *x*2 + 3*x*3 + 5*x*4 ⭢ min**

**3*x*1 + *x*2 + 3*x*3 + *x*4 ≥ -2**

***x*2 – 2*x*3 – *x*4 ≥ -7**

**2*x*1 – *x*2 + *x*3 + *x*4 ≤ 12**

***x*1 ≤ 0 ; x3, *x*4 ≥ 0.**

1. **Chứng minh bài toán trên giải được.**
2. **Bài toán có phương án cực biên tối ưu không ? Vì sao.**

**Giải:**

1. Dễ thấy *x*0 = (0,0,0,0) là một phương án của bài toán ⇒ bài toán có phương án.

Đặt: = -*x*1; *x*2 = - (với , , ≥ 0)

🢡 f(x) = + - + 3*x*3 + 5*x*4 ⭢ min

Các ràng buộc mới

3 + - + 3*x*3 + *x*4 ≥ -2

- – 2*x*3 – *x*4 ≥ -7

2 - + + *x*3 + *x*4 ≤ 12

, , , *x*3, *x*4 ≥ 0

Từ ràng buộc thứ nhất, ta có:

3 + - + 3*x*3 + *x*4 ≥ -2 ⇒ - + (3 + + 3*x*3 + *x*4) ≥ -2 ⇒ - ≥ -2

🢡 f(x) = + - + 3*x*3 + 5*x*4 ≥ -2 (, , , *x*3, *x*4 ≥ 0)

Vậy f(x) bị chặn dưới.

Bài toán (min) giải được.

## Bài 5: Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

5.1**.** **f(x) = 2x1 + 10x2 + 4x3 + 8x4 + 8x5 + 3x6 ⭢ min**

**x1 + x4 = 5**

**x1 + x5 + 2x6 = 11**

**x3 + x6 = 5**

**x1 + x2 x6 = 4**

**xj ≥ 0, j = 1,6.**

**Giải:**

Ta có bảng đơn hình

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 2  x1 | 10  x2 | 4  x3 | 8  x4 | 8  x5 | 3  x6 |
| 8 | x4 | 5 | **1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | x5 | 11 |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | x3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | x2 | 4 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | f | 188 |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,4,5,5,11,0) với f = 188

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = , c6 = 5), ta chọn số dương c1 = trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)+(1); (3):=(3)+(1); (5):=(5)+(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 14 |  | 0 | 0 |  | 1 | 2 |
| x3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| x2 | 1 |  | 1 | 0 |  | 0 |  |
| f | 152 |  | 0 | 0 |  | 0 | **5** |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (5,1,5,0,14,0) với f = 152

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c6 = 5), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)-2(3); (4):=(4)+(3); (5):=(5)-5(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 4 |  | 0 | -2 |  | 1 | 0 |
| x6 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x2 | 7 |  | 1 |  |  | 0 | 0 |
| f | 127 |  | 0 | -5 |  | 0 | 0 |

Hàng cuối gồm các phần tử nhỏ hơn hoặc bằng 0, nên phương án tối ưu của bài toán là (5,7,0,0,4,5), với fmin = 127.

5.2**. f(x) = 2x1 + x2 + 2x3 + 5x4 - 5x5 - 5x6 ⭢ max**

**-2x1 - 4x2 + x3 + x6 = 1**

**x1 - 4x2 + x3 + x5 = 4**

**-x1 - 3x2 + x3 + x4 = 4**

**xj ≥ 0, j = 1,6.**

**Giải:**

Đặt g(x) = -f(x) = -2x1 - x2 - 2x3 - 5x4 + 5x5 + 5x6 ⭢ min

Ta có bảng đơn hình

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -2  x1 | -1  x2 | -2  x3 | -5  x4 | 5  x5 | 5  x6 |
| 5 | x6 | 1 | -2 | -4 | **1** | 0 | 0 | 1 |
| 5 | x5 | 4 | 1 | -4 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| -5 | x4 | 4 | -1 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  | g | 5 | 2 | -24 | **7** | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,4,4,1) với g = 5

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = 2, c3 = 7), ta chọn số dương c3 = 7 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)-(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-7(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 1 | -2 | -4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x5 | 3 | **3** | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| x4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| g | -2 | **16** | 4 | 0 | 0 | 0 | -7 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,1,3,3,0) với g = -2

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = 16, c2 = 4), ta chọn số dương c1 = 16 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+2(2); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-16(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 3 | 0 | -4 | 1 | 0 |  |  |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| x4 | 2 | 0 | **1** | 0 | 1 |  |  |
| g | -18 | 0 | **4** | 0 | 0 |  |  |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,0,3,2,0,0) với g = -18

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c2 = 4), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (1):=(1)+4(3); (5):=(5)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 11 | 0 | 0 | 1 | 4 |  | -1 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| x2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |  |  |
| g | -26 | 0 | 0 | 0 | -4 | -4 | **1** |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,2,11,0,0,0) với g = -26

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c6 = 1), trên cột này các số hạng đều âm. Bài toán gmin không có phương án tối ưu ⇒ Bài toán fmax cũng không có phương án tối ưu.

5.3**. f(x) = x1 + x2 - 2x3 + 3x4 + 4x5 + x6 ⭢ min**

**x1 - x2 + 2x5 – x6 + x7 = 40**

* **2x2 + x3 – x5 + 3x6 – x7 = 10**
* **x2 + x4 + x5 + 2x6 + x7 = 60**

**xj ≥ 0, j = 1,7.**

**Giải:**

Ta có bảng đơn hình

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 1  x1 | 1  x2 | -2  x3 | 3  x4 | 4  x5 | 1  x6 | 0  x7 |
| 1 | x1 | 40 | 1 |  | 0 | 0 | 2 | -1 | **1** |
| -2 | x3 | 10 | 0 | -2 | 1 | 0 | -1 | 3 | -1 |
| 3 | x4 | 60 | 0 |  | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 |
|  | f | 200 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -2 | **6** |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (40,0,10,60,0,0,0) với f = 200

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c5 = 3, c7 = 6), ta chọn số dương c7 = 6 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)+(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-6(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x7 | 40 | 1 |  | 0 | 0 | 2 | -1 | 1 |
| x3 | 50 | 1 |  | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| x4 | 20 | -1 | **1** | 0 | 1 | -1 | 3 | 0 |
| f | -40 | -6 | **9** | 0 | 0 | -9 | 4 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,50,20,0,0,40) với f = -40

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c2 = 9, c6 = 4), ta chọn số dương c2 = 9 trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (1):=(1)+(3); (2):=(2)+(3); (4):=(4)-9(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x7 | 70 |  | 0 | 0 |  |  |  | 1 |
| x3 | 120 |  | 0 | 1 |  |  |  | 0 |
| x2 | 20 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 3 | 0 |
| f | -220 | **3** | 0 | 0 | -9 | 0 | -23 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,20,120,0,0,0,70) với f = -220

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c1 = 3), trên cột này các số hạng đều âm. Vậy bài toán không có phương án tối ưu.

5.4**. f(x) = x1 + 2x2 - 4x3 + 3x4 ⭢ min**

**2x1 - x2 + x3 + x4 = 4**

**-6x1 + 3x2 + 3x3 + 2x4 = 18**

**-x1 + x2 - x3 + x4 = 10**

**xj ≥ 0, j = 1,4.**

**Giải:**

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ba ẩn giả x5, x6, x7 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: *f*(x) = x1 + 2x2 - 4x3 + 3x4 + Mx5 + Mx6 + Mx7 ⭢ min

2x1 - x2 + x3 + x4 + x5 = 4

-6x1 + 3x2 + 3x3 + 2x4 + x6 = 18

-x1 + x2 - x3 + x4 + x7 = 10

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 1  x1 | 2  x2 | -4  x3 | 3  x4 |
| M | x5 | 4 | 2 | -1 | 1 | **1** |
| M | x6 | 18 | -6 | 3 | 3 | 2 |
| M | x7 | 10 | -1 | 1 | -1 | 1 |
|  | *f* | 0 | -1 | -2 | 4 | -3 |
|  |  | 32 | -5 | 3 | 3 | **4** |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,4,18,10) với *f* = 32M

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c2 = 3M-2, c3 = 3M+4, c4 = 4M-3), ta chọn số dương c4 = 4M-3 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < < ). Biến đổi (2):=(2)-2(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)+3(1), (5):=(5)-4(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x4 | 4 | 2 | -1 | 1 | 1 |
| x6 | 10 | -10 | **5** | 1 | 0 |
| x7 | 6 | -3 | 2 | -2 | 0 |
| *f* | 12 | 5 | -5 | 7 | 0 |
|  | 16 | -13 | **7** | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,4,0,10,6) với *f* = 16M+12

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c2 = 7M-5), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)+5(2); (5):=(5)-7(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x4 | 6 | 0 | 0 |  | 1 |
| x2 | 2 | -2 | 1 |  | 0 |
| x7 | 2 | 1 | 0 |  | 0 |
| *f* | 22 | -5 | 0 | 8 | 0 |
|  | 2 | 1 | 0 |  | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,6,0, 0,2) với *f* = 2M+22

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c1 = M-15), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (2):=(2)+2(3); (4):=(4)+15(3); (5):=(5)-(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x4 | 6 | 0 | 0 |  | 1 |
| x2 | 6 | 0 | 1 |  | 0 |
| x7 | 2 | 1 | 0 |  | 0 |
| *f* | 32 | 0 | 0 | -4 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối gồm các phần tử nhỏ hơn hoặc bằng 0, nên phương án tối ưu của bài toán là (2,6,0,6), với fmin = 32.

5.5**.**

**f(x) = 2x1 - 3x2 - 2x3 + x4 - x5 - 4x6 + 3x7 ⭢ min**

**- 2x2 + x3 + x4 + x6 - 2x7 = 26**

**x1 - 3x2 + x3 + 3x4 + x6 – 4x7 = 20**

**-x3 + x5 + x6 +5x7 = 1**

* **2x2 + 2x3 + x4 - 4x7 = 16**

**xj ≥ 0, j = 1,7.**

**Giải:**

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm hai ẩn giả x8, x9 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: *f*(x) =2x1 - 3x2 - 2x3 + x4 - x5 - 4x6 + 3x7 + Mx8 + Mx9 ⭢ min

- 2x2 + x3 + x4 + x6 - 2x7 + x8 = 26

x1 - 3x2 + x3 + 3x4 + x6 – 4x7 = 20

-x3 + x5 + x6 +5x7 = 1

* 2x2 + 2x3 + x4 - 4x7 + x9 = 16

xj ≥ 0, j = 1,9.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 2  x1 | -3  x2 | -2  x3 | 1  x4 | -1  x5 | -4  x6 | 3  x7 |
| M | x8 | 26 | 0 | -2 | 1 | 1 | 0 | 1 | -2 |
| 2 | x1 | 20 | 1 | -3 | 1 | 3 | 0 | 1 | -4 |
| -1 | x5 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 5 |
| M | x9 | 16 | 0 | -2 | **2** | 1 | 0 | 0 | -4 |
|  | *f* | 39 | 0 | -3 | 5 | 5 | 0 | 5 | -16 |
|  |  | 42 | 0 | -4 | **3** | 2 | 0 | 1 | -6 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (20,0,0,0,1,0, 0,26,16) với *f* = 42M+39

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c3 = 3M+5, c3 = 2M+5, c4 = M+5), ta chọn số dương c3 = 3M+5 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)-(4); (2):=(2)-(4); (3):=(3)+(4); (5):=(5)-5(4); (6):=(6)-3(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x8 | 18 | 0 | -1 | 0 |  | 0 | 1 | 0 |
| x1 | 12 | 1 | -2 | 0 |  | 0 | 1 | -2 |
| x5 | 9 | 0 | -1 | 0 |  | 1 | **1** | 3 |
| x3 | 8 | 0 | -1 | 1 |  | 0 | 0 | -2 |
| *f* | -1 | 0 | 2 | 0 |  | 0 | 5 | -6 |
|  | 18 | 0 | -1 | 0 |  | 0 | **1** | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (12,0,8,0,9,0, 0,18,0) với *f* = 18M-1

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c4 = M+, c6 = M+5), ta chọn số dương c6 = M+5 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì < < ). Biến đổi (1):=(1)-(3); (2):=(2)-(3); (5):=(5)-5(3); (6):=(6)-(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x8 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -3 |
| x1 | 3 | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -5 |
| x6 | 9 | 0 | -1 | 0 |  | 1 | 1 | 3 |
| x3 | 8 | 0 | -1 | 1 |  | 0 | 0 | -2 |
| *f* | -46 | 0 | 7 | 0 | 0 | -5 | 5 | -21 |
|  | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -3 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (3,0,8,0,0,9,0,9,0) với *f* = 9M-46

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (3,0,8,0,0,9,0,9,0).

Ta thấy ẩn giả x8=9 ≠ 0. Vậy bài toán ban đầu không có phương án tối ưu.

5.6**.** **f(x) = 2x1 - x2 - 2x3 - 2x4 + x5 - 4x6 + x7 ⭢ min**

**-x2 + x3 + x4 + x6 - 2x7 = 6**

**x1 + x3 + 3x4 + x6 – 4x7 = 10**

**2x2 - x3 + x5 + x6 +5x7 = 3**

**-2x2 + 2x3 + x4 - 4x7 = 12**

**xj ≥ 0, j = 1,7.**

**Giải:**

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm hai ẩn giả x8, x9 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: *f*(x) = 2x1 - x2 - 2x3 - 2x4 + x5 - 4x6 + x7 + Mx8 + Mx9 ⭢ min

-x2 + x3 + x4 + x6 - 2x7 + x8 = 6

x1 + x3 + 3x4 + x6 – 4x7 = 10

2x2 - x3 + x5 + x6 +5x7 = 3

-2x2 + 2x3 + x4 - 4x7 + x9 = 12

xj ≥ 0, j = 1,9.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 2  x1 | -1  x2 | -2  x3 | -2  x4 | 1  x5 | -4  x6 | 1  x7 |
| M | x8 | 6 | 0 | -1 | **1** | 1 | 0 | 1 | -2 |
| 2 | x1 | 10 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | -4 |
| 1 | x5 | 3 | 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 5 |
| M | x9 | 12 | 0 | -2 | 2 | 1 | 0 | 0 | -4 |
|  | *f* | 23 | 0 | 3 | 3 | 8 | 0 | 7 | -4 |
|  |  | 18 | 0 | -3 | **3** | 2 | 0 | 1 | -6 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (10,0,0,0,3,0, 0,6,12) với *f* = 18M+23

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c3 = 3M+5, c4 = 2M+8, c6 = M+7), ta chọn số dương c3 = 3M+5 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)-(1); (3):=(3)+(1); (4):=(4)-2(1); (5):=(5)-3(1); (6):=(6)-3(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 6 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -2 |
| x1 | 4 | 1 | **1** | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 |
| x5 | 9 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| x9 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| *f* | 5 | 0 | **6** | 0 | 5 | 0 | 4 | 2 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (4,0,6,0,9,0, 0,0,0) với *f* = 5

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c2 = 6, c7 = 2), ta chọn số dương c2 = 6 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (1):=(1)+(2); (3):=(3)-(2); (5):=(5)-6(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 10 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | -4 |
| x2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 |
| x5 | 5 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | **5** |
| x9 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| *f* | -19 | -6 | 0 | 0 | -7 | 0 | 4 | **14** |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,4,10,0,5,0, 0,0,0) với *f* = -19

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c7 = 14), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (3):=(3); (1):=(1)+4(3); (2):=(2)+2(3); (5):=(5)-14(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 14 |  | 0 | 1 |  |  |  | 0 |
| x2 | 6 |  | 1 | 0 |  |  |  | 0 |
| x7 | 1 |  | 0 | 0 |  |  |  | 1 |
| x9 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| *f* | -33 |  | 0 | 0 |  |  |  | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,6,14,0,0,0,1,0,0) với *f* = -33

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (3,0,8,0,0,9,0,9,0). Ta thấy các ẩn giả đều bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (0,6,14,0,0,0,1) với f(x) = -33.

5.7**.** **f(x) = 2x1 + 5x2 - x3 + 3x4 +5 x5 + x6 ⭢ min**

**x1 + x4 = 5**

**x2 x3 + x5 = 21**

**x3 + x6 = 10**

**3x1 + 5x2 + 6x3 = 90**

**xj ≥ 0, j = 1,6.**

**Giải :**

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x7 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: *f*(x) = 2x1 + 5x2 - x3 + 3x4 +5 x5 + x6 + Mx7 ⭢ min

x1 + x4 = 5

x2 x3 + x5 = 21

x3 + x6 = 10

3x1 + 5x2 + 6x3 + x7 = 90

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 2  x1 | 5  x2 | -1  x3 | 3  x4 | 5  x5 | 1  x6 |
| 3 | x4 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | x5 | 21 | 0 | 1 |  | 0 | 1 | 0 |
| 1 | x6 | 10 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 1 |
| M | x7 | 90 | 3 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 |
|  | *f* | 130 | 1 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 90 | 3 | 5 | **6** | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,5,21,10,90) với *f* = 90M+130

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c1 = 3M+1, c2 = 5M, c3 = 6M-2), ta chọn số dương c3 = 6M-2 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)+(3); (4):=(4)-6(3); (5):=(5)+2(3); (6):=(6)-6(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 29 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| x3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x7 | 30 | 3 | **5** | 0 | 0 | 0 | -6 |
| *f* | 150 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
|  | 30 | 3 | **5** | 0 | 0 | 0 | -6 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,5,29, 0,30) với *f* = 30M+150

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = 3M+1, c2 = 5M), ta chọn số dương c2 = 5M trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < ). Biến đổi (4):=(4); (2):=(2)-(4); (6):=(6)-5(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 23 |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| x3 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| x2 | 6 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| *f* | 150 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **2** |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,5,23, 0,6) với *f* = 150

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = 1, c6 = 2), ta chọn số dương c6 = 2 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)-2(3); (4):=(4)+(3); (5):=(5)-2(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | 5 | **1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 3 |  | 0 | -2 | 0 | 1 | 0 |
| x6 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x2 | 18 |  | 1 |  | 0 | 0 | 0 |
| *f* | 130 | **1** | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,5,3,10,18) với *f* = 130

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c1 = 1), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (2):=(2)+(1); (4):=(4)-(1); (5):=(5)-(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 6 | 0 | 0 | -2 |  | 1 | 0 |
| x6 | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x2 | 15 |  | 1 |  |  | 0 | 0 |
| *f* | 125 | 0 | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (5,15,0,0,6,10,0) với *f* = 125

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (5,15,0,0,6,10,0). Ta thấy ẩn giả x7 = 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (5,15,0,0,6,10) với f(x) = 125.

## Bài 6: Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

Bài 6.1: **f(x) = -4x1 + 3x2 + x3 max**

**x1 – x2 + 3x3 10**

**x1  – 2x2 + 2x3 -60**

**-x1 + x2 8**

**x1 – 3x2 – x3 12**

**xj  0 ; j = 1,3.**

**Giải:**

Đặt g(x) = -f(x) = 4x1 - 3x2 - x3 min

Bài toán dạng chính tắc:

x1 – x2 + 3x3 + x4 = 10

-x1  + 2x2 - 2x3 + x5 = 60

-x1 + x2 + x6 = 8

x1 – 3x2 – x3 + x7 = 12

xj  0 ; j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 10 | 1 | -1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 60 | -1 | 2 | -2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x6 | 8 | -1 | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 12 | 1 | -3 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| g(x) | 0 | -4 | **3** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối có 2 số dương, ta chọn c2 = 3. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 3 ( vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=(1)+(3); (2):=(2) –2(3); (4):=(4) +3(3); (5):=(5)–3(3). Ta được bảng đơn hình thứ 2:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 18 | 0 | 0 | **3** | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x5 | 44 | 1 | 0 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 |
| x2 | 8 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 36 | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| g(x) | -24 | -1 | 0 | **1** | 0 | 0 | -3 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,8,0) với g(x) = -24

Hàng cuối có 1 số dương. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ nhất. Thực hiện các phép biến đổi: (1):= (1); (2):=(2)+2(1); (4):=(4)+(1); (5):=(5)–(1). Ta được bảng đơn hình thứ 3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 |  | 0 |  | 0 |
| x5 | 56 | 1 | 0 | 0 |  | 1 |  | 0 |
| x2 | 8 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 42 | -2 | 0 | 0 |  | 0 |  | 1 |
| g(x) | -30 | -1 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,8,6) với g(x) = -30

Ta thấy hàng cuối đều không dương nên phương án tối ưu là (0,8,6) với f(x)max = -g(x)min = 30

### Bài 6.2

**f(x) = 2x1 + 4x2 + x3 + 3x4 max**

**2x1 + x2 – x3 – 2x4 19**

**2x2 – 6x3 + 3x4 12**

**x1 + 3x2 + x4 17**

**4x1 + 2x2 + 2x3 + x4  8**

**xj  0 ; j = 1,4.**

**Giải:**

Đặt g(x) = -f(x) = -2x1 - 4x2 - x3 - 3x4 min

Bài toán dạng chính tắc:

2x1 + x2 – x3 – 2x4 + x5 = 19

2x2 – 6x3 + 3x4 + x6 = 12

x1 + 3x2 + x4 + x7 = 17

4x1 + 2x2 + 2x3 + x4  + x8 = 8

xj  0 ; j = 1,8

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x5 | 19 | 2 | 1 | -1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 12 | 0 | 2 | -6 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 17 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x8 | 8 | 4 | **2** | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| g(x) | 0 | 2 | **4** | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Ta thấy hàng cuối có 4 số dương ta chọn c2 = 4. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 4 (vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (4):= (4); (1):=(1)–(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)–3(4); (5):=(5)–2(4). Ta được bảng đơn hình thứ 2:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x5 | 15 | 0 | 0 | -2 |  | 1 | 0 | 0 |  |
| x6 | 4 | -4 | 0 | -8 | **2** | 0 | 8 | 0 | -1 |
| x7 | 5 | -5 | 0 | -3 |  | 0 | 0 | 1 |  |
| x2 | 4 | 2 | 1 | 1 |  | 0 | 0 | 0 |  |
| g(x) | -16 | -6 | 0 | -3 | **1** | 0 | 0 | 0 | -2 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,4,0,0) với g(x) = -16

Hàng cuối cùng có 1 số dương, ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 2 (vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (2):=(2); (1):=(1)+(2); (3):=(3)+(2); (4):=(4)-(2); (5):=(5)–(2). Ta được bảng đơn hình thứ 3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x5 | 20 | -5 | 0 | -12 | 0 | 1 |  | 0 |  |
| x4 | 2 | -2 | 0 | -4 | 1 | 0 |  | 0 |  |
| x7 | 6 | -6 | 0 | -5 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| x2 | 3 | 3 | 1 | **3** | 0 | 0 |  | 0 |  |
| g(x) | -18 | -4 | 0 | **1** | 0 | 0 |  | 0 |  |

Bảng đơn hình cho ta phương cán cực biên là (0,3,0,2) với g(x) = -18

Hàng cuối có 1 số dương. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 4. Thực hiện các phép biến đổi: (4):=(4); (1):=(1)+12(4); (2):=(2)+4(4); (3):=(3)+5(4); (5):=(5)–(4). Ta được bảng đơn hình thứ 4:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x5 | 32 | 7 | 4 | 0 | 0 | 1 |  | 0 |  |
| x4 | 6 | 2 |  | 0 | 1 | 0 |  | 0 |  |
| x7 | 11 | -1 |  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |
| x3 | 1 | 1 |  | 1 | 0 | 0 |  | 0 |  |
| g(x) | -19 | -5 |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  |

Bảng đơn hình cho ta phương cán cực biên là (0,0,1,6) với g(x) = -19

Hàng cuối cùng không có số dương nên phương án tối ưu của bài toán là (0,0,1,6).

Với g(x)min = -19 → f(x)max = 19

Bài 6.3: **f( x) = 4x1 - 2x2 + 3x3 + 3x4 ⭢ min**

**x1 + 2x2 + x3 – 3x4 10**

**x1 – x2 + x3 – x4 6**

**2x1 + x2 + 3x3 8**

**x j ≥ 0,j = 1,4.**

**Giải:**

Ta chuyển bài toán về dạng chính tắc:

f(x) = 4x1 - 2x2 + 3x3 + 3x4 ⭢ min

x1 + 2x2 + x3 – 3x4 + x5 = 10

x1 – x2 + x3 – x4 + x6 = 6

2x1 + x2 + 3x3 + x7 = 8

xj ≥ 0,j = 1,7

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x5 | 10 | 1 | **2** | 1 | -3 | 1 | 0 | 0 |
| x6 | 6 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 8 | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| f(x) | 0 | -4 | **2** | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0; 0; 0;0;10; 6; 8) với f(x)=0

Hàng cuối có 1 số dương c2=2, trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng thứ 1 (vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=(1); (2):=(2)+(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-2(1). Ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x2 | 5 |  | 1 |  |  |  | 0 | 0 |
| x6 | 11 |  | 0 |  |  |  | 1 | 0 |
| x7 | 3 |  | 0 |  |  |  | 0 | 1 |
| f(x) | -10 | -5 | 0 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 |

Các số hạng hàng cuối đều không dương nên bài toán đã cho có phương án tối ưu là (0,5,0,0,0) với f(x)min = -10

Bài 6.4**:** **f(x) = 2x1 - x2 - x3 + 6x4 ⭢ max**

**x1 + 2x2 – 4x3 + x4  9**

**-3x1 + 2x2 + x3 4**

**5x1 + 3x2 + + x4  1**

**x j ≥ 0,j ≠3; x3 ≤ 0**

**Giải:**

Đặt g(x) = -f(x) = -2x1 + x2 + x3 – 6x4 ⭢ min

Đặt = -x3 ()

Ta có bài toán dạng chính tắc:

g(x)= -2x1 + x2 -  - 6x4 ⭢ min

x1 + 2x2 + 4+ x4  + x5 9

-3x1 + 2x2 - + x6 4

5x1 + 3x2 + x4  + x7  1

x j ≥ 0,j3; 0

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 |  | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x5 | 9 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x6 | 4 | -3 | 2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 1 | 5 | 3 | 0 | **1** | 0 | 0 | 1 |
| g | 0 | 2 | -1 | 1 | **6** | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,0,0,0,9,4,1) với g(x) = 0

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương c4 = 6 lớn nhất; trên cột này có 2 số dương, ta chọn số dương hàng 3 làm phần tử trục xoay (vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=(1)-(3); (4):=(4)-6(3). Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 |  | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x5 | 8 | -4 | -1 | **4** | 0 | 1 | 0 | -1 |
| x6 | 4 | -3 | 2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x4 | 1 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| g | -6 | -28 | -19 | **1** | 0 | 0 | 0 | -6 |

Hàng cuối có 1 số hạng dương = 1, trên cột này có 1 số dương ở hàng thứ nhất, chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (1):= (1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)-(1). Ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 |  | x4 | x5 | x6 | x7 |
|  | 2 | -1 |  | 1 | 0 |  | 0 |  |
| x6 | 6 | -4 |  | 0 | 0 |  | 1 |  |
| x4 | 1 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| g | -8 | -27 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |

Hàng cuối các số đều không dương nên bài toán có phương án tối ưu là (0,0,2,1,0,0,0) với g(x)min= -8. Vậy bài toán ban đầu có phương án tối ưu là (0,0,-2,1), (x'3 = -x3 x3 = -2) với f(x)max = -g(x)min = 8.

Bài 6.5**:** **f(x) = x1 – 3x2 + 2x3 – 7x4 ⭢ min**

**-x1 + 2x2 + 3x4  7**

**2x1 - 3x2 + x3 - x4 8**

**x1 - x2 + x4  9**

**xj ≥ 0 ; j = 1,4.**

**Giải :**

Đưa về bài toán dạng chính tắc:

f(x) = x1 – 3x2 + 2x3 – 7x4 ⭢ min

-x1 + 2x2 + 3x4 + x5 = 7

2x1 - 3x2 + x3 - x4 + x6  8

x1 - x2 + x4  + x7  9

xj ≥ 0; j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 1  x1 | -3  x2 | 2  x3 | -7  x4 | 0  x5 | 0  x6 | 0  x7 |
| 0 | x5 | 7 | -1 | 2 | 0 | **3** | 1 | 0 | 0 |
| 2 | x3 | 8 | 2 | -3 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | x7 | 9 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|  | f(x) | 16 | 3 | -3 | 0 | **5** | 0 | 2 | 0 |

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1=3; c4=5), ta chọn số dương lớn hơn (c4=5>c1=3). Trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng 1 (vì ). Thực hiện phép biến đổi: (1):=(1); (2):=(2)+(1); (3):=(3)–(1); (4):=(4)–5(1). Ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 |  |  |  | 0 | 1 |  | 0 | 0 |
| x3 |  |  |  | 1 | 0 |  | 1 | 0 |
| x7 |  |  |  | 0 | 0 |  | 0 | 1 |
| f(x) |  |  |  | 0 | 0 |  | 2 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,0, ,,0,0,) với f(x) =

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1=, c6=2), chon số dương lớn hơn (c1=**)**. Trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng 3 (vì ). Thực hiện các phép biến đổi: (3):= (3); (2):=(2)-(3); (4):=(4)-(3). Ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 4 | 0 |  | 0 | 1 |  | 0 |  |
| x3 | 2 | 0 |  | 1 | 0 |  | **1** |  |
| x1 | 5 | 1 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |
| f(x) | -19 | 0 |  | 0 | 0 |  | **2** |  |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (5,0,2,4,0,0,0) với f(x) = -19

Hàng cuối có một số dương (c6=2). Trên cột này có 1 một số dương ở hàng thứ hai, chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện phép biến đổi: (4):=(4)–2(2). Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x4 | 4 | 0 |  | 0 | 1 |  | 0 |  |
| x6 | 2 | 0 |  | 1 | 0 |  | 1 |  |
| x1 | 5 | 1 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |
| f(x) | -23 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 0 | -1 |

Hàng cuối đều là số không dương nên phương án tối ưu của bài toán gốc là (5,0,0,4) với f(x)min = -23.

## Bài 7: Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

7.1**.** **f(x) = 2x1 + x2 + x3 + 4x4 ⭢ max**

**5x1 + x2 + x3 + 6x4 = 50**

**-3x1 + x3 + 2x4 ≥ 16**

**4x1 + 3x3 + x4 ≤ 23**

**xj ≥ 0, j = 1,4.**

**Giải :**

Đặt g(x)= -f(x)= -2x1 - x2 - x3 - 4x4 ⭢ min

Thêm ẩn bù x5 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ hai và x6 vào ràng buộc thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

g(x)= -2x1 - x2 - x3 - 4x4 ⭢ min

5x1 + x2 + x3 + 6x4 = 50

-3x1 + x3 + 2x4 - x5 = 16

4x1 + 3x3 + x4 + x6 = 23

xj ≥ 0, j = 1,6.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x7 vào ràng buộc thứ hai để được bài toán (M) tương ứng: *g*(x) = -2x1 - x2 - x3 - 4x4  + Mx7 ⭢ min

5x1 + x2 + x3 + 6x4 = 50

-3x1 + x3 + 2x4 - x5 + x7 = 16

4x1 + 3x3 + x4 + x6 = 23

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -2  x1 | -1  x2 | -1  x3 | -4  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| -1 | x2 | 50 | 5 | 1 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| M | x7 | 16 | -3 | 0 | 1 | **2** | -1 | 0 |
| 0 | x6 | 23 | 4 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 |
|  | *g* | -50 | -3 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 |
|  |  | 16 | -3 | 0 | 1 | **2** | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,50,0,0,0,23,16) với *g* = 16M-50

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c3 = M, c4 = 2M-2), ta chọn số dương c4 = 2M-2 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)-6(2); (3):=(3)-(2); (4):=(4)+2(2); (5):=(5)-2(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 2 | 14 | 1 | -2 | 0 | 3 | 0 |
| x4 | 8 |  | 0 |  | 1 |  | 0 |
| x6 | 15 |  | 0 |  | 0 |  | 1 |
| *g* | -34 | -6 | 0 | **1** | 0 | -1 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,8,0,15,0) với *g* = -34

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c3 = 1), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì < ). Biến đổi (3):=(3); (1):=(1)+2(3); (2):=(2)-(3); (4):=(4)-(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 14 |  | 1 | 0 | 0 |  |  |
| x4 | 5 |  | 0 | 0 | 1 |  |  |
| x3 | 6 |  | 0 | 1 | 0 |  |  |
| *g* | -40 |  | 0 | 0 | 0 |  |  |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,14,6,5,0,0,0) với *g* = -40

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (0,14,6,5,0,0,0). Ta thấy ẩn giả x7 bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (0,14,6,5) với fmax = -gmin = 40.

7.2**.** **f(x) = x1 + 2x2 + x3 + 4x4 – x5 ⭢ min**

**2x1 + 2x2 + 4x4 - 2x5 ≥ 64**

**x1 + x2 - 2x4 + 3x5 ≤ 20**

**x1 - x2 + x4 + 2x5 ≤ 27**

**2x1 - 3x2 + x3 + 2x4 + x5 = 24**

**xj ≥ 0, j = 1,5.**

**Giải:**

Thêm ẩn bù x6 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ nhất và x7, x8 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

f(x) = x1 + 2x2 + x3 + 4x4 – x5 ⭢ min

2x1 + 2x2 + 4x4 - 2x5 – x6 = 64

x1 + x2 - 2x4 + 3x5 + x7 = 20

x1 - x2 + x4 + 2x5 + x8 = 27

2x1 - 3x2 + x3 + 2x4 + x5 = 24

xj ≥ 0, j = 1,8.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x9 vào ràng buộc thứ nhất để được bài toán dạng (M) tương ứng: *f*(x) = x1 + 2x2 + x3 + 4x4 - x5 + Mx9⭢ min

2x1 + 2x2 + 4x4 - 2x5 – x6 + x9 = 64

x1 + x2 - 2x4 + 3x5 + x7 = 20

x1 - x2 + x4 + 2x5 + x8 = 27

2x1 - 3x2 + x3 + 2x4 + x5 = 24

xj ≥ 0, j = 1,9.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 1  x1 | 2  x2 | 1  x3 | 4  x4 | -1  x5 | 0  x6 | 0  x7 | 0  x8 |
| M | x9 | 64 | 2 | 2 | 0 | 4 | -2 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 20 |  | 1 | 0 | -2 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | x8 | 27 | 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | x3 | 24 | 2 | -3 | 1 | **2** | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | *f* | 24 | 1 | -5 | 0 | -2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 64 | 2 | 2 | 0 | **4** | -2 | -1 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,24,0,0,0,20,27,64) với *f* = 64M+24

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c1 = 2M+1, c2 = 2M-5, c4 = 4M-2), ta chọn số dương c4 = 4M-2 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)-4(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)-(4); (5):=(5)+(4); (6):=(6)-4(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x9 | 16 | -2 | **8** | -2 | 0 | -4 | -1 | 0 | 0 |
| x7 | 44 |  | -2 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| x8 | 15 | 0 |  |  | 0 |  | 0 | 0 | 1 |
| x4 | 12 | 1 |  |  | 1 |  | 0 | 0 | 0 |
| *f* | 48 | 3 | -8 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
|  | 16 | -2 | **8** | -2 | 0 | -4 | -1 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,12,0,0,44,15,16) với *f* = 16M+48

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c2 = 8M-8), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1(vì < ). Biến đổi (1):=(1); (2):=(2)+2(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)+(1); (5):=(5)+8(1); (6):=(6)-8(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 2 |  | 1 |  | 0 |  |  | 0 | 0 |
| x7 | 48 | -1 | 0 |  | 0 | 3 |  | 1 | 0 |
| x8 | 14 |  | 0 |  | 0 |  |  | 0 | 1 |
| x4 | 15 |  | 0 |  | 1 |  |  | 0 | 0 |
| *f* | 64 | **1** | 0 | -1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,15,0,0,48,14,0) với *f* = 64

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c1 = 1), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4(vì < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)+(4); (2):=(2)+(4); (3):=(3)-(4); (5):=(5)-(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 8 | 0 | 1 |  |  |  |  | 0 | 0 |
| x7 | 72 | 0 | 0 |  |  |  |  | 1 | 0 |
| x8 | 11 | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | 1 |
| x1 | 24 | 1 | 0 |  |  |  |  | 0 | 0 |
| *f* | 40 | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (24,8,0,0,0,0,72,11,0) với *f* = 40

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (24,8,0,0,0,0,72,11,0). Ta thấy ẩn giả x9 bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (24,8,0,0,0) với f(x) = 40.

7.3**.**

**f(x) = x1 + 3x2 + 5x3 + 3x4 + 6x5 ⭢ max**

**2x1 + x2 + 3x3 x4 + 5x5 = 42**

**-2x1 + 2x3 x4 + 2x5 ≤ 18**

**5x1 - 3x3 + 2x4 - 3x5 ≤ 0**

**x1 + 2x3 - 6x4 + 3x5 ≥ 21**

**xj ≥ 0, j = 1,5.**

**Giải:**

Đặt g(x)= -f(x)= -x1 - 3x2 - 5x3 - 3x4 - 6x5 ⭢ min

Thêm ẩn bù x6, x7 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và ba. Thêm ẩn x8 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ tư ta được bài toán dạng chính tắc.

g(x)= -x1 - 3x2 - 5x3 - 3x4 - 6x5 ⭢ min

2x1 + x2 + 3x3 x4 + 5x5 = 42

-2x1 + 2x3 x4 + 2x5 + x6 = 18

5x1 - 3x3 + 2x4 - 3x5 + x7 = 0

x1 + 2x3 - 6x4 + 3x5 – x8 = 21

xj ≥ 0, j = 1,8.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: *g*(x) = -x1 - 3x2 - 5x3 - 3x4 - 6x5 +Mx9 ⭢ min

2x1 + x2 + 3x3 x4 + 5x5 = 42

-2x1 + 2x3 x4 + 2x5 + x6 = 18

5x1 - 3x3 + 2x4 - 3x5 + x7 = 0

x1 + 2x3 - 6x4 + 3x5 – x8 + x9 = 21

xj ≥ 0, j = 1,9.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -1  x1 | -3  x2 | -5  x3 | -3  x4 | -6  x5 | 0  x6 | 0  x7 | 0  x8 |
| -3 | x2 | 42 | 2 | 1 | 3 |  | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x6 | 18 | -2 | 0 | 2 |  | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 0 | 5 | 0 | -3 | 2 | -3 | 0 | 1 | 0 |
| M | x9 | 21 | 1 | 0 | 2 | -6 | **3** | 0 | 0 | -1 |
|  | *g* | -126 | -5 | 0 | -4 | 13 | -9 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 21 | 1 | 0 | 2 | -6 | **3** | 0 | 0 | -1 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,42,0,0,0,18,0,0,21) với *g* = 21M-126

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c1 = M-5, c3 = 2M-4, c5 = 3M-9), ta chọn số dương c5 = 3M-9 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)-5(4); (2):=(2)-2(4); (3):=(3)+3(4); (5):=(5)+9(4); (6):=(6)-3(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 7 |  | 1 |  |  | 0 | 0 | 0 |  |
| x6 | 4 |  | 0 |  |  | 0 | 1 | 0 |  |
| x7 | 21 | 6 | 0 | -1 | -4 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| x5 | 7 |  | 0 |  | -2 | 1 | 0 | 0 |  |
| *g* | -63 | -2 | 0 | **2** | -5 | 0 | 0 | 0 | -3 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,7,0,0,7,4,21,0,0) với *g* = -63

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c3 =2), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+(2); (3):=(3)+(2); (4):=(4)-(2); (5):=(5)-2(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 9 | -1 | 1 | 0 |  | 0 |  | 0 | 2 |
| x3 | 6 | -4 | 0 | 1 | 5 | 0 |  | 0 | 1 |
| x7 | 27 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 0 |
| x5 | 3 | **3** | 0 | 0 |  | 1 | -1 | 0 | -1 |
| *g* | -75 | **6** | 0 | 0 | -15 | 0 | -3 | 0 | -5 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,9,6,0,3,0,27,0,0) với *g* = -75

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c1 =6), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)+(4); (2):=(2)+4(4); (3):=(3)-2(4); (5):=(5)-6(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 10 | 0 | 1 | 0 |  |  |  | 0 |  |
| x3 | 10 | 0 | 0 | 1 |  |  |  | 0 |  |
| x7 | 25 | 0 | 0 | 0 |  |  |  | 1 |  |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |  | 0 |  |
| *g* | -81 | 0 | 0 | 0 |  | -2 | -1 | 0 | -3 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,10,10,0,0,0,25,0,0) với *g* = -81

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (1,10,10,0,0,0,25,0,0). Ta thấy ẩn giả x9 bằng 0 nên bài toán min có phương án tối ưu là (1,10,10,0,0) với g(x)min = -81 ⇒ f(x)max = -g(x)min = 81.

7.4**.** **f(x) = -7x1 + 3x2 + 2x3 - x4 + x5 ⭢ max**

**x1 - 2x2 + x3 + 2x4 ≤ 44**

**-x1 + x2 - 2x3 + 3x4 + x5 = 28**

**-2x1 + x2 + x3 + 4x4 ≤ 22**

**-x2 + 2x3 + x4 = 20**

**xj ≥ 0, j = 1,5.**

**Giải:**

Đặt g(x)= -f(x)= 7x1 - 3x2 - 2x3 + x4 - x5 ⭢ min

Thêm ẩn bù x6, x7 lần lượt vào ràng buộc thứ nhất và thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

g(x)= 7x1 - 3x2 - 2x3 + x4 - x5 ⭢ min

x1 - 2x2 + x3 + 2x4 + x6 = 44

-x1 + x2 - 2x3 + 3x4 + x5 = 28

-2x1 + x2 + x3 + 4x4 + x7 = 22

-x2 + 2x3 + x4 = 20

xj ≥ 0, j = 1,7.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x8 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: *g*(x) = 7x1 - 3x2 - 2x3 + x4 - x5 + Mx8 ⭢ min

x1 - 2x2 + x3 + 2x4 + x6 = 44

-x1 + x2 - 2x3 + 3x4 + x5 = 28

-2x1 + x2 + x3 + 4x4 + x7 = 22

-x2 + 2x3 + x4 + x8 = 20

xj ≥ 0, j = 1,8.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 7  x1 | -3  x2 | -2  x3 | 1  x4 | -1  x5 | 0  x6 | 0  x7 |
| 0 | x6 | 44 | 1 | -2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| -1 | x5 | 28 | -1 | 1 | -2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 22 | -2 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 |
| M | x8 | 20 | 0 | -1 | **2** | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | *g* | -28 | -6 | 2 | 4 | -4 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 20 | 0 | -1 | **2** | 1 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,28,44,22,20) với *g* = 20M-28

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c3 = 2M+4, c4 = M-4), ta chọn số dương c4 = M-4 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)-(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)-(4); (5):=(5)-4(4); (6):=(6)-2(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x6 | 34 | 1 |  | 0 |  | 0 | 1 | 0 |
| x5 | 48 | -1 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 12 | -2 |  | 0 |  | 0 | 0 | 1 |
| x3 | 10 | 0 |  | 1 |  | 0 | 0 | 0 |
| *g* | -68 | -6 | **4** | 0 | -6 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,0,48,34,12,0) với *g* = -68

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c2 = 4), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (3):=(3); (1):=(1)+(3); (4):=(4)+(3); (5):=(5)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| 0 | x6 | 46 | -1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 |
| -1 | x5 | 48 | -1 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x2 | 8 |  | 1 | 0 |  | 0 | 0 |  |
| M | x3 | 14 |  | 0 | 1 |  | 0 | 0 |  |
|  | *g* | -100 |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,8,14,0,48,46,0,0) với *g* = -100

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (0,8,14,0,48,46,0,0). Ta thấy ẩn giả x8 bằng 0 nên bài toán min có phương án tối ưu là (0,8,14,0,48) với g(x)min = -100 ⇒ f(x)max = -g(x)min = 100.

7.5**.**

**f(x) = 3x1 - 2x2 - x3 + 3x4 - x5 ⭢ max**

**2x1 - x2 - 2x3 - 2x4 + 4x5 = -12**

**4x1 - 3x3 - x4 + 2x5 ≤ 10**

**2x1 - 2x3 + 3x4 ≤ 26**

**2x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 ≥ 8**

**xj ≥ 0, j = 1,5.**

**Giải:**

Đặt g(x)= -f(x)= -3x1 + 2x2 + x3 - 3x4 + x5 ⭢ min

Thêm ẩn bù x6, x7 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và thứ ba, thêm ẩn bù x8 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ tư ta được bài toán dạng chính tắc.

g(x)= -3x1 + 2x2 + x3 - 3x4 + x5 ⭢ min

-2x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 12

4x1 - 3x3 - x4 + 2x5 + x6 = 10

2x1 - 2x3 + 3x4 + x7 = 26

2x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 – x8 = 8

xj ≥ 0, j = 1,8.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: *g*(x) = -3x1 + 2x2 + x3 - 3x4 + x5 + Mx9 ⭢ min

-2x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 12

4x1 - 3x3 - x4 + 2x5 + x6 = 10

2x1 - 2x3 + 3x4 + x7 = 26

2x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 – x8 + x9 = 8

xj ≥ 0, j = 1,10.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -3  x1 | 2  x2 | 1  x3 | -3  x4 | 1  x5 | 0  x6 | 0  x7 | 0  x8 |
| 2 | x2 | 12 | -2 | 1 | 2 | 2 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x6 | 10 | 4 | 0 | -3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 26 | 2 | 0 | -2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| M | x9 | 8 | 2 | 0 | -2 | -3 | **4** | 0 | 0 | -1 |
|  | *g* | 24 | -1 | 0 | 3 | 7 | -9 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 8 | 2 | 0 | -2 | -3 | **4** | 0 | 0 | -1 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,12,0,0,0,10,26,0,8) với *g* = 8M+24

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = 2M-1, c5 = 4M-9), ta chọn số dương c4 = 4M-9 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì < ). Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)+4(4); (2):=(2)-2(4); (5):=(5)+9(4); (6):=(6)-4(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 20 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x6 | 6 | 3 | 0 | -2 |  | 0 | 1 | 0 |  |
| x7 | 26 | 2 | 0 | -2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x5 | 2 |  | 0 |  |  | 1 | 0 | 0 |  |
| *g* | 42 |  | 0 |  |  | 0 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,20,0,0,2,6,26,0,0) với *g* = 42

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = , c5 = ), ta chọn số dương c1 = trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < < ). Biến đổi (2):=(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)(2); (5):=(5)(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 20 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x1 | 2 | 1 | 0 |  |  | 0 |  | 0 |  |
| x7 | 22 | 0 | 0 |  |  | 0 |  | 1 |  |
| x5 | 1 | 0 | 0 |  |  | 1 |  | 0 |  |
| *g* | 35 | 0 | 0 |  |  | 0 |  | 0 |  |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (2,20,0,0,1,0,22,0,0) với *g* = 35

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c3 = ), trên cột này các số hạng đều âm và bằng 0 nên bài toán (M) không có phương án tối ưu ⇒ Bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu.

## Bài 8: Bài tập tổng hợp

8.1**.** **Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau**

**f(x) = 4x1 + 4x2 - x3 + 3x4 ⭢ min**

**3x1 - x3 - x4 ≥ 8**

**x1 + 5x2 + 4x3 + x4 ≤ 9**

**2x1 – x2 - x3 - 2x4 = 5**

**xj ≥ 0, j = 1,4.**

1. **Chứng minh rằng x0 = (, 0, 0, ) là phương án cực biên. Xuất phát từ x0, tìm lời giải của bài toán bằng phương pháp đơn hình.**
2. **Thay điều kiện x2 ≥ 0 bởi x2 ≤ 0. Tìm lời giải bài toán.**

**Giải:**

a) Thế x0 = (, 0, 0, ) vào các ràng buộc của bài toán ta được

3. - 0 - = 8 (thỏa chặt)

+ 5.0 + 4.0 + < 9 (thỏa lỏng)

2. – 0 - 0 – 2. = 5 (thỏa chặt)

x1 = > 0 (thỏa lỏng)

x2 = 0 (thỏa chặt)

x3 = 0 (thỏa chặt)

x4 = > 0 (thỏa lỏng)

Ta thấy các ràng buộc đều thỏa nên x0 là phương án của bài toán, trong đó có 4 ràng buộc thỏa chặt.

Từ ràng buộc thứ nhất ta có vectơ u1 = (3, 0, -1, -1)

Từ ràng buộc thứ ba ta có vectơ u1 = (2, -1, -1, -2)

Từ ràng buộc thứ năm ta có vectơ u1 = (0, 1, 0, 0)

Từ ràng buộc thứ sáu ta có vectơ u1 = (0, 0, 1, 0)

Xét: k1u1 + k2u2 + k3u3 + k4u4 = 0

3k1 + 2k2 = 0

-k2 + k3 = 0

-k1 –k2 + k4 = 0

-k1 - 2k2 =0

Ta có A= và Det(A)= -4 ≠ 0 nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

k1 = k2 = k3 = k4 = 0

⇒ 4 vectơ u1, u2, u3, u4 độc lập tuyến tính.

Bài toán có 4 biến nên n=4, số ràng buộc thỏa chặt độc lập tuyến tính là 4 nên x0=(, 0, 0, ) là phương án cực biên.

Xuất phát từ x0, tìm lời giải của bài toán.

Dạng chính tắc của bài toán: f(x) = 4x1 + 4x2 - x3 + 3x4 ⭢ min

3x1 - x3 - x4 – x5 = 8

x1 + 5x2 + 4x3 + x4 + x6 = 9

2x1 – x2 - x3 - 2x4 = 5

xj ≥ 0, j = 1,6.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|  | 8 | 3 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| x6 | 9 | 1 | 5 | 4 | 1 | 0 | 1 |
|  | 5 | 2 | -1 | -1 | -2 | 0 | 0 |

Hàng 1 chọn x4 làm ẩn cơ sở, ta thực hiện các phép biến đổi (1)= -(1), (2)=(2)-(1), (3)=(3)+2(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 | -8 | -3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| x6 | 17 | 4 | 5 | 3 | 0 | -1 | 1 |
|  | -11 | -4 | -1 | 1 | 0 | 2 | 0 |

Hàng 3 chọn x1 làm ẩn cơ sở, thực hiện các phép biến đổi (3)=(3), (1)=(1)+3(3), (2)=(2)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 4  x1 | 4  x2 | -1  x3 | 3  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| 3 | x4 |  | 0 |  |  | 1 |  | 0 |
| 0 | x6 | 6 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | x1 |  | 1 |  |  | 0 |  | 0 |
|  | f |  | 0 |  |  | 0 |  | 0 |

Bảng đơn cho ta phương án cực biên (, 0, 0, , 0, 6) với f =

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c3 = ), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ nhất (vì < ). Thực hiện các phép biến đổi (1)=4(1), (2) :=(2)-4(1), (3) :=(3)+(1), (4) :=(4)(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 1 | 0 | 3 | 1 | 4 | -2 | 0 |
| x6 | 2 | 0 | -8 | 0 | -16 | 9 | 1 |
| x1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| f | 11 | 0 | -3 | 1 | 0 | -2 | 0 |

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 nên phương án tố ưu của bài toán là (3, 0, 1, 0) với fmin =11.

1. Đặt = -x2 ⇒ ≥ 0

Bài toán trở thành : f(x) = 4x1 - 4- x3 + 3x4 ⭢ min

3x1 - x3 - x4 ≥ 8

x1 - 5 + 4x3 + x4 ≤ 9

2x1 + - x3 - 2x4 = 5

x1, , x3, x4 ≥ 0

Dạng chính tắc tương ứng: f(x) = 4x1 - 4- x3 + 3x4 ⭢ min

3x1 - x3 - x4 – x5 = 8

x1 - 5 + 4x3 + x4 + x6 = 9

2x1 + - x3 - 2x4 = 5

x1, , x3, x4, x5, x6 ≥ 0

Dạng (M) tương ứng: f(x) = 4x1 - 4- x3 + 3x4 + Mx7 + Mx8 ⭢ min

3x1 - x3 - x4 – x5 + x7 = 8

x1 - 5 + 4x3 + x4 + x6 = 9

2x1 + - x3 - 2x4 +x8 = 5

x1, , x3, x4, x5, x6, x7, x8 ≥ 0

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 4  x1 | -4 | -1  x3 | 3  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| M | x7 | 8 | 3 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | x6 | 9 | 1 | -5 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| M | x8 | 5 | **2** | 1 | -1 | -2 | 0 | 0 |
|  | f | 0 | -4 | 4 | 1 | -3 | 0 | 0 |
|  |  | 13 | **5** | 1 | -2 | -3 | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,0,9,8,5) với f (x) = 13M

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 =5M-4, =M+4), ta chọn số dương c1 = 5M-4, trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì > > ). Biến đổi (3):=(3); (1):=(1)-3(3); (2):=(2)(3); (4):=(4)+4(3), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 |  | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x7 |  | 0 |  |  | **2** | -1 | 0 |
| x6 |  | 0 |  |  | 2 | 0 | 1 |
| x1 |  | 1 |  |  | -1 | 0 | 0 |
| f | 10 | 0 | 6 | -1 | -7 | 0 | 0 |
|  |  | 0 |  |  | **2** | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (,0,0,0,0,,,0) với f (x) = M+10

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c4 =2M-7, c3=M-1), ta chọn số dương c4 = 2M-7, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì < ). Biến đổi (1):=(1); (2):=(2)-2(1); (3):=(3)+(1); (4):=(4)+7(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 |  | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x4 |  | 0 |  |  | 1 |  | 0 |
| x6 | 6 | 0 | -4 | 4 | 0 | 1 | 1 |
| x1 |  | 1 |  |  | 0 |  | 0 |
| f |  | 0 |  |  | 0 |  | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (,0,0,,0,6,0,0) với f (x) =

Hàng cuối có 2 số hạng dương ( =, c3=), ta thấy trên cột các số hạng đều âm nên bài toan không có phương án tối ưu.

8.2. **Cho bài toán quy hoạch tuyến tính**

**f(x) = -4x1 - 2x2 + x3 ⭢ min**

**-x1 + x2 + 2x3 ≥ 2**

**4x1 + 3x2 - x3 ≤ 12**

**2x1 + x2 ≤ 8**

**xj ≥ 0, j = 1,3.**

1. **Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.**
2. **Có kết luận gì về lời giải của bài toán nếu f(x)⭢max. Hãy chỉ ra tập phương án mà f(x) tăng vô hạn.**

**Giải:**

1. Đưa bài toán về dạng chính tắc: f(x) = -4x1 - 2x2 + x3 ⭢ min

-x1 + x2 + 2x3 – x4 = 2

4x1 + 3x2 - x3 + x5 = 12

2x1 + x2 + x6 = 8

xj ≥ 0, j = 1,6.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x7 vào ràng buộc thứ nhất để được bài toán (M) tương ứng: f(x) = -4x1 - 2x2 + x3 + Mx7⭢ min

-x1 + x2 + 2x3 – x4 + x7 = 2

4x1 + 3x2 - x3 + x5 = 12

2x1 + x2 + x6 = 8

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình tương ứng:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -4  x1 | -2  x2 | 1  x3 | 0  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| M | x7 | 2 | -1 | 1 | **2** | -1 | 0 | 0 |
| 0 | x5 | 12 | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | x6 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | f | 0 | 4 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 2 | -1 | 1 | **2** | -1 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,12,8,2) với f = 2M

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c2 = M+2, c3 = 2M-1), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1. Biến đổi (1):=(1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)+(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 1 |  |  | 1 |  | 0 | 0 |
| x5 | 13 |  |  | 0 |  | 1 | 0 |
| x6 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| f | 1 |  |  | 0 |  | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,1,0,13,8,0) với f = 1

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 = , c3 = ), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)-(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 |  | 0 | 1 | 1 |  |  | 0 |
| x1 |  | 1 | 1 | 0 |  |  | 0 |
| x6 |  | 0 | -1 | 0 |  |  | 1 |
| f | -12 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 |

Hàng cuối các số hạng đều không dương nên phương án tối ưu của bài toán là x0=(,0,).

1. Nếu f(x)->max

Đặt g(x) = -f(x) = 4x1 + 2x2 - x3 ⭢ min

Bài toán dạng (M) tương ứng:

g(x) = 4x1 + 2x2 - x3 + Mx7⭢ min

-x1 + x2 + 2x3 – x4 + x7 = 2

4x1 + 3x2 - x3 + x5 = 12

2x1 + x2 + x6 = 8

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 4  x1 | 2  x2 | -1  x3 | 0  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| M | x7 | 2 | -1 | 1 | **2** | -1 | 0 | 0 |
| 0 | x5 | 12 | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | x6 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | g | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 2 | -1 | 1 | **2** | -1 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,12,8,2) với g = 2M

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c2 = M-2, c3 = 2M+1), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1. Biến đổi (1):=(1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)-(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x3 | 1 |  |  | 1 |  | 0 | 0 |
| x5 | 13 |  |  | 0 |  | 1 | 0 |
| x6 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| g | 1 |  |  | 0 |  | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c4= ), trên cột này các số hạng đều không dương nên bài toán không có phương án tối ưu.

Phương án cực biên ở câu a) x0=(,0,) và Z=(0,0,,0,,0) là vectơ tiến ra vô hạn  
Tập phương án : x=x0+ θZ=(,0,+), (với θ≥0)

8.3. **Cho bài toán quy hoạch tuyến tính**

**f(x) = 3x1 - 2x2 - x3 - 4x4 - x5 ⭢ max**

**-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 38**

**5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 ≤ 4**

**-4x1 + 2x3 + 5x4 ≤ 56**

**4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 ≥ 16**

**xj ≥ 0, j = 1,5.**

1. **Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.**
2. **Tìm phương án tối ưu của bài toán khi có thêm điều kiện f(x)≤20.**

**Giải:**

1. Đặt g(x) = -f(x) = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 + x5 ⭢ min

Bài toán dạng chính tắc

-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 38

5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 +x6 = 4

-4x1 + 2x3 + 5x4 +x7 = 56

4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 –x8 = 16

xj ≥ 0, j = 1,8.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: g(x) = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 + x5 +Mx9 ⭢ min

-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 38

5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 +x6 = 4

-4x1 + 2x3 + 5x4 +x7 = 56

4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 –x8 +x9 = 16

xj ≥ 0, j = 1,9.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -3  x1 | 2  x2 | 1  x3 | 4  x4 | 1  x5 | 0  x6 | 0  x7 | 0  x8 |
| 2 | x2 | 38 | -4 | 1 | 2 | 2 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x6 | 4 | **5** | 0 | -3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 56 | -4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| M | x9 | 16 | 4 | 0 | -2 | -3 | 4 | 0 | 0 | -1 |
|  | *g* | 76 | -5 | 0 | 3 | 0 | -9 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 16 | **4** | 0 | -2 | -3 | 4 | 0 | 0 | -1 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,38,0,0,0,4,56,0,16) với g (x) = 16M+76

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 =4M-5, c5=4M-9), ta chọn số dương c1 = 4M-5, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì < ). Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+4(2); (3):=(3)+4(2); (4):=(4)-4(2); (5):=(5)+5(2); (6):=(6)-4(2), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 |  | 0 | 1 |  |  |  |  | 0 | 0 |
| x1 |  | 1 | 0 |  |  |  |  | 0 | 0 |
| x7 |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 1 | 0 |
| x9 |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | -1 |
| *g* | 80 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | 1 | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | -1 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (,,0,0,0,0,,0,) với g (x) = M+80

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c3 =M, c5=M-7), ta chọn số dương c3 = M, trên cột này có một số dương ở hàng thứ tư, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)+(4); (2):=(2)+(4); (3):=(3)+(4); (6):=(6)-(4), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x2 | 54 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x1 | 20 | 1 | 0 | 0 |  | 4 | -1 | 0 |  |
| x7 | 72 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | -1 |
| x3 | 32 | 0 | 0 | 1 |  | 6 | -2 | 0 |  |
| *g* | 80 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | **1** | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Ta thấy hàng cuối có một số dương, trên cột này các số hạng đều âm nên bài toán không có phương án tối ưu.

1. Khi f(x) ≤ 20, ta có :

f(x) = 3x1 - 2x2 - x3 - 4x4 - x5 ⭢ max

-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 38

5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 ≤ 4

-4x1 + 2x3 + 5x4 ≤ 56

4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 ≥ 16

3x1 - 2x2 - x3 - 4x4 - x5 ≤ 20

xj ≥ 0, j = 1,5.

Đặt g(x) = -f(x) = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 + x5 ⭢ min

Bài toán dạng chính tắc

-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 = 38

5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 +x6 = 4

-4x1 + 2x3 + 5x4 +x7 = 56

4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 –x8 = 16

3x1 - 2x2 - x3 - 4x4 - x5 + x9 = 20

xj ≥ 0, j = 1,9.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x10, x11 lần lượt vào ràng buộc thứ nhất và thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: g(x) = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 + x5 +Mx10 + Mx11 ⭢min

-4x1 + x2 + 2x3 + 2x4 - 4x5 + x10 = 38

5x1 - 3x3 - x4 + 2x5 +x6 = 4

-4x1 + 2x3 + 5x4 +x7 = 56

4x1 - 2x3 - 3x4 + 4x5 –x8 + x11 = 16

3x1 - 2x2 - x3 - 4x4 - x5 + x9 = 20

xj ≥ 0, j = 1,11.

Ta có bảng đơn hình :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | -3  x1 | 2  x2 | 1  x3 | 4  x4 | 1  x5 | 0  x6 | 0  x7 | 0  x8 | 0  x9 |
| M | x10 | 38 | -4 | 1 | 2 | 2 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x6 | 4 | 5 | 0 | -3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | x7 | 56 | -4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| M | x11 | 16 | 4 | 0 | -2 | -3 | 4 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 0 | x9 | 20 | 3 | -2 | -1 | -4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | *g* | 0 | 3 | -2 | -1 | -4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 54 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,0,4,56,0,20,38,16) với g (x) = 54M

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c2 = M-2), trên cột này có một số dương ở hàng thứ nhất, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (5):=(5)+2(1); (6):=(6)+2(1); (7):=(7)-(1), ta được bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
| x2 | 38 | -4 | 1 | 2 | 2 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 4 | **5** | 0 | -3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x7 | 56 | -4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x11 | 16 | 4 | 0 | -2 | -3 | 4 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x9 | 96 | -5 | 0 | 3 | 0 | -9 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *g* | 76 | -5 | 0 | 3 | 0 | -9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 16 | **4** | 0 | -2 | -3 | 4 | 0 | 0 | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,38,0,0,0,4,56,0,96,0,16) với g (x) = 16M+76

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c1 =4M-5, c5=4M-9), ta chọn số dương c5 = 4M-5, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2. Biến đổi (2):=(2); (1):=(1)+4(3); (3):=(3)+4(2); (4):=(4)-4(2); (5):=(5)+5(2); (6)=(6)+5(2) ; (7) := (7) -4(2), ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
| x2 |  | 0 | 1 |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| x1 |  | 1 | 0 |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| x7 |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 |
| x11 |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | -1 | 0 |
| x9 | 100 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *g* | 80 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |  |  |  |  | 0 | -1 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (,,0,0,0,0,,0,100,0,)với g (x) = M+80

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c3 =M, c5=M-7, c6=+1), ta chọn c3 =M, trên cột này có một số dương ở hàng thứ tư, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (4):=(4); (1):=(1)+(4); (2):=(2)+(4); (3):=(3)+(4); (7):=(7)-(4), ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
| x2 | 54 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x1 | 20 | 1 | 0 | 0 |  | 4 | -1 | 0 |  | 0 |
| x7 | 72 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| x3 | 32 | 0 | 0 | 1 |  | 6 | -2 | 0 |  | 0 |
| x9 | 100 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | **1** | 0 | 0 | 1 |
| *g* | 80 | 0 | 0 | 0 | -1 | -7 | **1** | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (20,54,32,0,0,0,72,0,100,0,0) với g (x) = 80

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c6=1), trên cột này có một số dương ở hàng thứ năm, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (2):=(2)+(5); (4):=(4)+2(5); (6)=(6)-(5), ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 |
| x2 | 54 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x1 | 120 | 1 | 0 | 0 |  | -3 | 0 | 0 |  | 1 |
| x7 | 72 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| x3 | 32 | 0 | 0 | 1 |  | -8 | 0 | 0 |  | 2 |
| x6 | 232 | 0 | 0 | 0 |  | -7 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *g* | -20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (120,54,32,0,0,232,72,0,0,0,0) với g (x) = -20

Ta thấy hàng cuối bao gồm các số không dương và các ẩn giả của bài toán (M) đều bằng 0 nên bài toán ban đầu có phương án tối ưu là (120,54,32,0,0) với f(x)max = - g(x)min = 20.

## Bài 9 : Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình

Bài 9.1. **f(x) = 3x1 + 4x2 + 2x3 + 2x4 ⭢ min**

**2x1 + 2x2 - x4 = 28**

**x1 + 5x2 + 3x3 - 2x4 ≤ 31**

**2x1 – 2x2 + 2x3 + x4 = 16**

**xj ≥ 0, j = 1,4.**

**Giải:**

Đưa bài toán về dạng chuẩn ta được bài toán (M): f(x) = 3x1 + 4x2 + 2x3 + 2x4 + M(x6 + x7) ⭢ min

2x1 + 2x2 - x4 + x6 = 28

x1 + 5x2 + 3x3 - 2x4 + x5 = 31

2x1 – 2x2 + 2x3 + x4 + x7 = 16

xj ≥ 0, j = 1,7.

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số | ACS | 0  SHTD | 3  x1 | 4  x2 | 2  x3 | 2  x4 | 0  x5 |
| M | x6 | 28 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | x5 | 31 | 1 | 5 | 3 | -2 | 1 |
| M | x7 | 16 | 2 | -2 | 2 | 1 | 0 |
|  | f | 0 | -3 | -4 | -2 | -2 | 0 |
|  |  | 44 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 |

Phương án cực biên (0,0,0,0,31,28,16), = 0. Hàng cuối có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất c1 = 4M – 3. Trên cột này có 3 số dương ta chọn số dương ở hàng thứ 3 làm phần tử trục xoay (vì 16/2 < 28/2 < 31/1). Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=(1)-2(3) ; (2):=(2)–(3) ; (3):= ½.(3); (4):=(4)+3(3) ; (5):=(5)–4(3).

Ta có bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x6 | 12 | 0 | 4 | -2 | 0 | 0 |
| x5 | 23 | 0 | 6 | 2 | -5/2 | 1 |
| x1 | 8 | 1 | -1 | 1 | 1/2 | 0 |
|  | 24 | 0 | -7 | 1 | -1/2 | 0 |
|  | 12 | 0 | 4 | -2 | 0 | 0 |

Phương án cực biên(8,0,0,0,23,12,0), = 24. Hàng cuối có 1 số dương, trên cột này có 2 số dương, ta chọn số dương ở hàng thứ nhất làm phần tử trục xoay (vì 12/4 < 23/6). Ta thực hiện các phép biến đổi sau : (1):= ¼ .(1) ; (2):=(2)–6(1) ; (3):=(3)+(1) ; (4):=(4)+7(1); (5):=(5)–4(1)

Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x2 | 3 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 0 |
| x5 | 5 | 0 | 0 | 5 | -5/2 | 1 |
| x1 | 11 | 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 |
|  | 45 | 0 | 0 | -5/2 | -1/2 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối các số hạng đều không dương.

Vậy bài toán có phương án tối ưu là: (11,3,0,0,5) với fmin = 45

### Bài 9.2

**f(x) = 3x1 - 2x2 + 2x3 + x4 min**

**2x1 - x2 + 4x3 + x4 = 10**

**-3x1 + 2x2 + x3 – 2x4 = 8**

**4x1 – x2 - 2x3 = 4**

**xj ≥ 0 ; j =**

**Giải:**

Bài toán chưa có ẩn cơ sở nên ta cần thêm ba ẩn giả là x5, x6 , x7 ≥ 0 để được bài toán (M)

= 3x1 - 2x2 + 2x3 + x4 + Mx5 + Mx6 + Mx7 min

2x1 - x2 + 4x3 + x4 + x5 = 10

-3x1 + 2x2 + x3 – 2x4 + x6 = 8

4x1 – x2 - 2x3 + x7 = 4

xj ≥ 0 ; j =

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| HS | ACS | 0  SHTD | 3  x1 | -2  x2 | 2  x3 | 1  x4 |
| M | x5 | 10 | 2 | -1 | 4 | 1 |
| M | x6 | 8 | -3 | 2 | 1 | -2 |
| M | x7 | 4 | 4 | -1 | -2 | 0 |
|  |  | 0 | -3 | 2 | -2 | -1 |
|  |  | 22 | 3 | 0 | 3 | -1 |

Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương ở cột 6 (vì 3M – 2 > 3M – 3) với phần tử trục xoay trên hàng 1 (vì 10/4 < 8/1). Thực hiện các biến đổi: (1):= ½.(1); (2):=(2)–(1); (3):=(3)+2(1); (4):=(4)+2(1); (5):=(5)–3(1)

Ta được bảng đơn hình sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 5/2 | 1/2 | -1/4 | 1 | 1/4 |
| x6 | 11/2 | -7/2 | 9/4 | 0 | -9/4 |
| x7 | 9 | 5 | -3/2 | 0 | 1/2 |
|  | 5 | -2 | 3/2 | 0 | -1/2 |
|  | 29/2 | 3/2 | 3/4 | 0 | -7/4 |

Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương ở cột 3 (vì 3/2.M – 2 > ¾.M + 3/2) với phần tử trục xoay trên hàng 3. Thực hiện các biến đổi (3):= 1/5.(3); (1):=(1)– ½.(3); (2):=(2)+7/2.(3); (4):=(4)+2(3); (5):=(5)–3/2.(3)

Ta được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 8/5 | 0 | -1/10 | 1 | 1/5 |
| x6 | 59/5 | 0 | 6/5 | 0 | -19/2 |
| x1 | 9/5 | 1 | -3/10 | 0 | -3/8 |
|  | 43/5 | 0 | 9/10 | 0 | -3/10 |
|  | 59/2 | 0 | 6/5 | 0 | -19/10 |

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 (vì 6/5.M + 9/10 > 0) với phần tử trục xoay trên hàng 2. Thực hiện các biến đổi : (2):= 5/6.(2); (1):=(1)+1/10.(2); (3):=(3)+3/10.(2); (4):=(4)9/10.(2); (5):=(5)–6/5.(2)

Ta được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 31/12 | 0 | 0 | 1 | 1/24 |
| x2 | 59/6 | 0 | 1 | 0 | -19/12 |
| x1 | 19/4 | 1 | 0 | 0 | -3/8 |
| f | -1/4 | 0 | 0 | 0 | 9/8 |

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 với phần tử trục xoay trên hàng 1. Thực hiện các biến đổi: (1):= 24(1); (2):=(2)+19/12.(1); (3):=(3)+3/8.(1); (4):=(4)–9/8.(1)

Ta được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x4 | 62 | 0 | 0 | 24 | 1 |
| x2 | 108 | 0 | 1 | 38 | 0 |
| x1 | 28 | 1 | 0 | 9 | 0 |
| f | -70 | 0 | 0 | -27 | 0 |

Phương án tối ưu: (28; 108; 0; 62) với fmin = -70

### Bài 9.3

**f(x) = -x1 - 2x2 - 3x3 + x4 min**

**x1 + 2x2 + 3x3 = 15**

**2x1 + x2 + 5x3 = 20**

**x1 + 2x2 + x3 + x4 = 10**

**xj ≥ 0 ; j =**

**Giải:**

Bài toán này đã có một ẩn cơ sở là x4 nên ta chỉ cần thêm hai ẩn giả là x5 , x6 ≥ 0 để được bài toán (M)

= -x1 - 2x2 - 3x3 + x4 + Mx5 + Mx6 min

x1 + 2x2 + 3x3 + x5 = 15

2x1 + x2 + 5x3 + x6 = 20

x1 + 2x2 + x3 + x4 = 10

xj ≥ 0 ; j =

Bảng đơn hình

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| HS | ACS | 0  SHTD | -1  x1 | -2  x2 | -3  x3 | 1  x4 |
| M | x5 | 15 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| M | x6 | 20 | 2 | 1 | 5 | 0 |
| 1 | x4 | 10 | 1 | 2 | 1 | 1 |
|  |  | 10 | 2 | 4 | 4 | 0 |
|  |  | 35 | 3 | 3 | 8 | 0 |

Hàng cuối có ba số dương, ta chọn số dương ở cột 6 (vì 8M + 4 lớn nhất) với phần tử trục xoay trên hàng 2 (vì 20/5 < 15/3 < 10/1). Thực hiện các biến đổi sau: (2):=1/5(2); (1):=(1)–3(2); (3):=(3)–(2); (4):=(4)–4(2); (5):=(5)–8(2).

Ta được bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x5 | 3 | -1/5 | 7/5 | 0 | 0 |
| x3 | 4 | 2/5 | 1/5 | 1 | 0 |
| x4 | 6 | 3/5 | 9/5 | 0 | 1 |
|  | -6 | 2/5 | 16/5 | 0 | 0 |
|  | 3 | -1/5 | 7/5 | 0 | 0 |

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 với phần tử trục xoay trên hàng 1

(vì 15/7 < 30/9 < 20/1). Thực hiện các biến đổi: (1):=5/7(1); (2):=(2)–1/5(1); (3):=(3)–3/5.(1); (4):=(4)–2/5(1); (5):=(5)+1/5(1)

Ta được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x2 | 15/7 | -1/7 | 1 | 0 | 0 |
| x3 | 25/7 | 2/5 | 0 | 1 | 0 |
| x4 | 15/7 | 6/7 | 0 | 0 | 1 |
| f | -90/7 | 6/7 | 0 | 0 | 0 |

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 3 với phần tử trục xoay trên hàng 3

(vì 25/7 < 125/14). Thực hiện các biến đổi: (3):= 7/6(3); (1):=(1)+1/7.(3); (2):=(2)–2/5(3); (4):=(4)6/7(3).

Ta được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x2 | 5/2 | 0 | 1 | 0 | 1/6 |
| x3 | 5/2 | 0 | 0 | 1 | -1/2 |
| x1 | 5/2 | 1 | 0 | 0 | 7/6 |
| f | -15 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Phương án tối ưu (5/2; 5/2; 5/2; 0) với fmin = -15

### Bài 9.4

**f(x) = 2x1 + x2 + x3 min**

**2x1 + x2 + x3 ≥ 7**

**3x1 + x2 + x3 ≥ 8**

**2x1 + x3 ≥ 5**

**xj ≥ 0 ; j =**

**Giải:**

Dạng chính tắc:

2x1 + x2 + x3 – x4 = 7

3x1 + x2 + x3 – x5 = 8

2x1 + x3 – x6 = 5

xj ≥ 0 ; j =

Dạng (M): = 2x1 + x2 + x3 + Mx7 + Mx8 + Mx9 min

2x1 + x2 + x3 – x4 + x7 = 7

3x1 + x2 + x3 – x5 + x8 = 8

2x1 + x3 – x6 + x9 = 5

xj ≥ 0 ; j =

Ta có bảng đơn hình sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| HS | ACS | 0  SHTD | 2  x1 | 1  x2 | 1  x3 | 0  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| M | x7 | 7 | 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | x8 | 8 | 3 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| M | x9 | 5 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
|  |  | 0 | -2 | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 20 | 7 | 2 | 3 | -1 | -1 | -1 |

Phương án cực biên (0,0,0,0,0,0,7,8,5) =0. Hàng cuối có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất c1= 7M – 2 . trên cột này có 3 số dương, ta chọn số dương ở hàng thứ 3 làm phần tử trục xoay vì 5/2 < 8/3 < 7/2. Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=(1)–2(3); (2):=(2)–3(3); (3):= ½(3) ; (4):=(4)+2(3); (5):=(5)–7(3)

Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x7 | 2 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| x8 | 1/2 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | -1 | 3/2 |
| x1 | 5/2 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | -1/2 |
|  | 5 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | -1 |
|  | 5/2 | 0 | 2 | -1/2 | -1 | -1 | 5/2 |

Phương án cực biên(5/2,0,0,0,0,0,2, ½,0 ) =5. Hàng cuối có 2 số dương, ta chọn số dương lớn nhất c6= 5/2.M – 1 . trên cột này có 2 số dương. Ta chọn số dương ở hàng thứ 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi sau: (1):=(1)–(2); (2):=2/3.(2); (3):=(3)+½(2); (4):=(4)+1(2); (5):=(5)5/2(2)

Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x7 | 5/3 | 0 | 1/3 | 1/3 | -1 | 2/3 | 0 |
| x6 | 1/3 | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 | -2/3 | 1 |
| x1 | 8/3 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 |
|  | 16/3 | 0 | -1/3 | -7/3 | 0 | -2/3 | 0 |
|  | 5/3 | 0 | 1/3 | -1/3 | -1 | 2/3 | 0 |

Phương án cực biên( 8/3,0,0,0,0, 1/3 , 5/3,0,0) =16/3. Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương lớn nhất c5= 2/3M – 2/3. Trên cột này có 1 số dương. Ta chọn số đó làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=3/2(1); (2):=(2)+2/3(1); (3):=(3)+1/3(1); (4):=(4)+2/3(1); (5):=(5)–2/3(1)

Ta có bảng đơn hình mới

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x7 | 5/2 | 0 | 1/2 | 1/2 | -3/2 | 1 | 0 |
| x5 | 2 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| x1 | 7/2 | 1 | 1/2 | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 |
|  | 7 | 0 | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Phương án tối ưu: (7/2; 0; 0) với fmin = 7

### Bài 9.5

**f(x) = x1 + x2 + 2x3 min**

**x1 + 3x2 - x3 ≥ 5**

**3x1 - x2 + 3x3 ≥ 2**

**2x1 + 3x2 + x3 ≥ 8**

**xj ≥ 0 ; j =**

**Giải:**

Dạng chính tắc:

x1 + 3x2 - x3 – x4 = 5

3x1 - x2 + 3x3 - x5 = 2

2x1 + 3x2 + x3 – x6 = 8

xj ≥ 0 ; j =

Dạng (M)

= x1 + x2 + 2x3 + Mx7 + Mx8 + Mx9 min

x1 + 3x2 - x3 – x4 + x7 = 5

3x1 - x2 + 3x3 - x5 + x8 = 2

2x1 + 3x2 + x3 – x6 + x9 = 8

xj ≥ 0 ; j =

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| HS | ACS | 0  SHTD | 1  x1 | 1  x2 | 2  x3 | 0  x4 | 0  x5 | 0  x6 |
| M | x7 | 5 | 1 | 3 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| M | x8 | 2 | **3** | -1 | 3 | 0 | -1 | 0 |
| M | x9 | 8 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | -1 |
|  |  | 0 | -1 | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 |
|  |  | 15 | 6 | 5 | 3 | -1 | -1 | -1 |

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương cột 4 (6M - 1), trên cột có 3 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay (vì 2/3 là tỉ số dương bé nhất). Thực hiện các phép biến đổi: (2):=1/3.(2), (1):=(1)-(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)+(2); (5):=(5)-6(2)

Ta có bảng đơn hình:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x7 | 13/3 | 0 | **10/3** | -2 | -1 | 1/3 | 0 |
| x1 | 2/3 | 1 | -1/3 | 1 | 0 | -1/3 | 0 |
| x9 | 20/3 | 0 | 11/3 | -1 | 0 | 2/3 | -1 |
|  | 2/3 | 0 | -4/3 | -1 | 0 | -1/3 | 0 |
|  | 11 | 0 | 7 | -3 | -1 | 1 | -1 |

Hàng cuối có 2 số dương, chọn số dương cột 4 (7M – 4/3); trên cột có 2 số dương, chọn số dương hàng 1 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (1):=3/10.(1); (2):=(2)+1/3.(1); (3):=(3)11/3.(1); (4):=(4)+4/3.(1); (5):=(5)–7.(1)

Ta có bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 13/10 | 0 | 1 | -3/5 | -3/10 | 1/10 | 0 |
| x1 | 11/10 | 1 | 0 | **4/5** | -1/10 | -3/10 | 0 |
| x9 | 19/10 | 0 | 0 | 6/5 | 11/10 | 3/10 | -1 |
|  | 12/5 | 0 | 0 | **-9/5** | -4/10 | -1/5 | 0 |
|  | 19/10 | 0 | 0 | **6/5** | 11/10 | 3/10 | -1 |

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương cột 5, trên cột này có 2 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện phép biến đổi: (2):= 5/4.(2); (1):= (1) + 3/5.(2); (3):=(3)– 6/5.(2); (4):=(4)+9/5.(2); (5):=(5)–6/5.(2)

Bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 17/8 | 3/4 | 1 | 0 | -3/8 | -1/8 | 0 |
| x3 | 11/8 | 5/4 | 0 | 1 | -1/8 | -3/8 | 0 |
| x9 | 1/4 | -3/2 | 0 | 0 | **5/4** | 3/4 | -1 |
|  | 39/8 | 9/4 | 0 | 0 | **-5/8** | -7/8 | 0 |
|  | 1/4 | -3/2 | 0 | 0 | **5/4** | 3/4 | -1 |

Hàng cuối có 2 số dương, chọn số dương cột 6, trên cột này có 1 số dương (hàng 3) chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (3):=4/5.(3); (1):=(1)+3/8.(3); (2):=(2)+1/8.(3); (4):=(4)+5/8.(3); (5):=(5)–5/4.(3)  
Bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 11/5 | 3/10 | 1 | 0 | 0 | 1/10 | -3/10 |
| x3 | 7/5 | 11/10 | 0 | 1 | 0 | -3/10 | -1/10 |
| x4 | 1/5 | -6/5 | 0 | 0 | 1 | 3/5 | -4/5 |
|  | 5 | 3/2 | 0 | 0 | 0 | -1/2 | -1/2 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hàng chứa hệ số M tương ứng đều bằng 0, loại bỏ đi hàng cuối ta có bảng đơn hình sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 11/5 | 3/10 | 1 | 0 | 0 | 1/10 | -3/10 |
| x3 | 7/5 | **11/10** | 0 | 1 | 0 | -3/10 | -1/10 |
| x4 | 1/5 | -6/5 | 0 | 0 | 1 | 3/5 | -4/5 |
| f | 5 | **3/2** | 0 | 0 | 0 | -1/2 | -1/2 |

Hàng cuối có 1 số dương (cột 3), trên cột này có 2 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (2):=10/11.(2); (1):=(1)–3/10.(2); (3):=(3)+6/5.(2); (4):=(4)3/2.(2)

Bảng đơn hình mới:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ACS | SHTD | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x2 | 20/11 | 0 | 1 | -3/11 | 0 | 2/11 | -3/11 |
| x1 | 14/11 | **1** | 0 | 10/11 | 0 | -3/11 | -1/11 |
| x4 | 19/11 | 0 | 0 | 12/11 | 1 | 3/11 | -10/11 |
| f | 34/11 | **0** | 0 | -15/11 | 0 | -1/11 | -4/11 |

Hàng cuối các số đều không dương

Bài toán ban đầu có phương án tối ưu là: (14/11; 20/11; 0) với fmin = 34/11.