TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH – MARKETING

BỘ MÔN TOÁN KHOA CƠ BẢN

MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mathematical Economic Models

Giảng viên: Th.s Nguyễn Trung Đông
E-Mail: nguyentrungdong144@yahoo.com

Bài tập nhóm: Nhóm 7 _ Buổi sáng thứ 7
Mã lớp học phần : 1311101003401
Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 23/11/2013

DANH SÁCH NHÓM 7

Họ và tên	MSSV	Lớp
1. Phan Châu Thông	1212150051	12DQH
2. Bùi Thị Kim Loan	1212150029	12DQH
3. Nguyễn Thị Thanh Thương	1212150057	12DQH
4. Võ Thị Ngọc Thu	1212150050	12DQH
5. Nguyễn Thị Kim Ngọc	1212020135	12DMA2

Chương I:

GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

<u>Bài 1:</u> Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng hóa lần lượt là

$S(P) = 0,1P^2 + 5P - 10$

$D(P) = \frac{50}{P-2}$

Chứng tỏ luôn tồn tại giá cân bằng nằm trong khoảng (3,5)

<u>Giải:</u>

Giá cân bằng khi: $S(p) = D(p)$

Đặt $f(p) = S(p) - D(p) = 0,1p^2 + 5p - 10 - \frac{50}{p-2}$

$f(3) = 0,1.3^2 + 5.3 - 10 - \frac{50}{3-2} = -44,1$

$f(5) = 0,1.5^2 + 5.5 - 10 - \frac{50}{5-2} = 0,83$

⇨ $f(3).f(5) < 0$

⇨ $\exists\, p_0 \in (3,5)$ sao cho $f(p_0) = 0$ ⇨ $S(p_0) = D(p_0)$.

<u>Bài 2:</u> Cho hàm doanh thu

$TR(Q) = 1200Q - Q^2$; $Q \geq 0$

a) Tìm hàm doanh thu cận biên:

Hàm doanh thu cận biên: $MR(Q) = (TR(Q))' = -2Q + 1200$

b) Tại Q_0 = 590, khi Q tăng lên 1 đvị thì doanh thu sẽ thay đổi bao nhiêu đvị

$Q_0 = 590 \Rightarrow MR(Q_0) = MR(590) = -2.590+1200 = 20$

Vậy khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì doanh thu tăng thêm 20 đơn vị.

c) Tính giá trị doanh thu biên tại Q_0 = 610 và giải thích ý nghĩa

$Q_0 = 610 \Rightarrow MR(Q_0) = MR(610) = -2.610 +1200 = -20$

Vậy khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì doanh thu giảm bớt 20 đơn vị.

<u>Bài 3:</u> Cho hàm sản xuất ngắn hạn

$Q = 30\sqrt{L}$; $L \geq 0$

a) Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động

$MPL = Q_L' = 30.\frac{1}{2}.L^{-1/2} = 15L^{-1/2}$

b) Tại L_0 = 144, nếu L tăng lên 1 đvị, sảnlượng sẽ thay đổi bao nhiêu đvị

$L_0 = 144 \Rightarrow MPL(L_0) = MPL(144) = 15.144^{-1/2} = 1,25$

Vậy nếu lao động tăng thêm 1 đơn vị thì sản lượng sẽ tăng thêm 1,25 đơn vị.

<u>Bài 4:</u> Cho hàm chi tiêu

$C(Y) = aY + b$; $(0 < a < 1, b > 0)$; $Y \geq 0$

a) Tìm hàm xu hướng tiêu dùng cận biên: $MCP(Y) = C'(Y) = a$

b) Ý nghĩa kinh tế của hệ số *a* là:

khi Y tăng thêm 1 đơn vị thì chi tiêu C tăng thêm *a* đơn vị.

<u>Bài 5 :</u> Cho hàm tổng chi phí

$TC(Q) = 0,1Q^2 + 0,3Q + 100$, $(Q \geq 0)$

a) Tìm hàm chi phí biên: $MC(Q) = TC'(Q) = 0{,}2Q + 0{,}3$

b) Tính chi phí biên tại mức sản lượng Q_0 = 120 và giải thích ý nghĩa

$Q_0 = 120 \Rightarrow MC(Q_0) = MC(120) = 0{,}2.120 + 0{,}3 = 24{,}3$

Vậy tại mức $Q_0 = 120$, khi sản lượng tăng thêm 1 đơn vị thì chi phí tăng 24,3 đơn vị.

<u>Bài 6 :</u>

Xét hàm cầu của một loại hàng hóa D = D(P)

a) **Lập công thức tính hệ số co dãn tại cầu tại mức giá P_0**

$\varepsilon_D = D'(P_0).\frac{P_0}{D(P_0)}$

b) **Áp dụng với $D(P) = 6P - P^2$, tại P_0=5 và giải thích ý nghĩa kết quả**

$$\frac{\partial D}{\partial P} = 6 - 2P$$

$\varepsilon_D = D'(P_0).\frac{P_0}{D(P_0)} = (6 - 2P_0).\frac{P_0}{6P_0 - P_0^2} = \frac{6-2P_0}{6-P_0}$

Tại P0 = 5

$\Rightarrow \varepsilon_D = -4$

<u>Ý nghĩa</u> : Khi P tăng lên 1% thì sản lượng D giảm xuống 4%.

<u>Bài 7:</u>

Cho hàm sản xuất $Q = aL^\alpha$, (a > 0, 0 < α < 1)

$Q' = \alpha a L^{\alpha-1}$

a) Hệ số co dãn của sản lượng theo lao động

$\varepsilon_{Q/L} = Q'.\frac{L}{Q} = \alpha a L^{\alpha-1}.\frac{L}{aL^\alpha} = \alpha$

b) Áp dụng cho $Q = 40L^{0,4}$, tại $L_0 = 20$

$Q = 40L^{0,4}$, tại $L_0 = 20$ ứng với α = 0,4

Dựa vào công thức từ câu a

=> Hệ số co dãn của sản lượng theo lao động tại $L_0 = 20$: $\varepsilon_{Q/L} = 0,4$

<u>Bài 8:</u>
Cho hàm sản xuất $Q = 120L^2 - L^3$, $L > 0$

Xác định mức sử dụng lao động để sản lượng tối đa

$Q' = 240L - 3L^2$

$Q' = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} L=80 \\ L=0\ (loại) \end{array}\right.$

$Q'' = -6L + 240 \rightarrow Q''(80) = -6.80 + 240 = -240 < 0$

=> Mức sử dụng lao động để tối đa sản lượng là: L = 80

<u>Bài 9 :</u> Cho hàm sản xuất $Q = 30L^{\frac{2}{3}}$; L >0

Tại mức sử dụng lao động bất kì, nếu lao động tăng 10% thì sản lượng thay đổi bao nhiêu %

$\varepsilon_{Q/L} = (30L^{\frac{2}{3}})'.\frac{L}{30L^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}$

Kết luận: Tại mức sử dụng lao động bất kì, nếu lao động tăng 10% thì sản lượng tăng 20/3 %.

<u>Bài 10 :</u> Cho hàm sản xuất biên của lao động $MPL = 40L^{0,5}$. Tìm hàm sản xuất ngắn hạn Q = f(L) biết Q(100) = 4000

$MPL = 40L^{0,5}$ => $Q = f(L) = \int MPLdL = \int 40L^{0,5}\, dL = \frac{80}{3}L^{1,5} + c$

Ta có : $Q_{(100)} = \frac{80.100^{1,5}}{3} + c = 4000$

=> $c = -\frac{68000}{3}$

Vậy $Q = \frac{80.L^{1,5} - 68000}{3}$

<u>Bài 11:</u> Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC = 8e^{0,2Q}$ và chi phí cố định $FC = 50$. Tìm hàm tổng chi phí

Ta có:

$TC = \int MCdQ = \int 8e^{0,2Q}dQ = 40e^{0,2Q} + c$

$FC = TC(Q = 0) = 40.e^{0,2.0} + c = 50$

$\Rightarrow c = 10$

Vậy $TC = 40e^{0,2Q} + 10$

<u>Bài 12 :</u> Cho hàm doanh thu biên ở mỗi mức sản lượng Q là

$MR(Q) = 50 – 2Q – 3Q^2$

Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm

Ta có : $MR(Q) = 50 – 2Q – 3Q^2$

$TR = \int MR = \int (50 - 2Q - 3Q^2)dQ = 50Q – Q^2 – Q^3 + C$

$TR = P.Q \Rightarrow P = \frac{TR}{Q} = -Q^2 – Q + 50 + \frac{C}{Q}$

<u>Bài 13:</u> Chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC = 32 + 18Q – 12Q^2$ và $FC = 43$. Tìm hàm tổng chi phí và chi phí khả biến

$MC = 32 + 18Q – 12Q^2$

$\Rightarrow TC = \int MC = \int (32 + 18Q - 12Q^2)dQ = 32Q + 9Q^2 – 4Q^3 + C$

Mà $TC(Q=0) = FC \Rightarrow C = 43$

$\Rightarrow TC = -4Q^3 + 9Q^2 + 32Q + 43$

$VC = TC – FC = -4Q^3 + 9Q^2 + 32Q$

<u>Bài 14 :</u> Chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC = 12e^{0,5Q}$

và FC = 36. Tìm hàm tổng chi phí

$TC = \int MC = \int 12e^{0,5Q}dQ = 12.\frac{1}{0,5}.e^{0,5Q} + C = 24e^{0,5Q} + C$

$TC(Q=0) = FC \Rightarrow 24e^{0,5.0} + C = 36 \Rightarrow C = 12$

Vậy $TC(Q) = 24e^{0,5Q} + 12$

<u>Bài 15 :</u> Doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MR = 40Q – 16e^{0,4Q}

Tìm hàm tổng doanh thu

Ta có hàm doanh thu cận biên $MR = 40Q – 16e^{0,4Q}$

Mà $TR = \int MR \Rightarrow TR = \int(40Q - 16e^{0,4Q})dQ = 20Q^2 – 40e^{0,4Q} + C$

$Q = 0 \Rightarrow TR = 0 \Rightarrow C = -40$

Vậy hàm tổng doanh thu $TR = 20Q^2 – 40e^{0,4Q} – 40$

<u>Bài 16:</u> Doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là MR = 84 – 4Q – Q^2 Hãy tìm hàm tổng doanh thu và hàm cầu

Ta có hàm doanh thu cận biên $MR = 84 – 4Q – Q^2$

Mà $TR = \int MR \Rightarrow TR = \int(84 – 4Q – Q^2)dQ = 84Q – 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + C$

$\Rightarrow P = TR/Q = 84 – 2Q - \frac{1}{3}Q^2 + \frac{C}{Q}$

Vậy hàm tổng doanh thu $TR(Q) = 84Q – 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + C$

Hàm cầu $P = 84 – 2Q - \frac{1}{3}Q^2 + \frac{C}{Q}$

<u>Bài 17 :</u> Cho hàm tiêu dùng C(Y) = 0,8Y + 0,2$\sqrt{Y}$ + 300 ; Y ≥ 0

a) Tại mức thu nhập Y$_0$ = 169 nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dùng thay đổi như thế nào ?

$\rho = \frac{\partial C}{\partial Y} = 0,8 + \frac{0,1}{\sqrt{Y}}$ (1)

Thế $Y_0 = 169$ vào (1) ta được $\rho \approx 0,81$

Vậy nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dùng tăng 0,81 đơn vị

b) Tính MPC(Y) tại Y_0 = 144 và giải thích ý nghĩa kết quả nhận đc

Tương tự câu a, thế $Y_0 = 144$ vào (1) ta được $\rho \approx 0,81$

Ý nghĩa: Nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dung tăng 0,81 đơn vị

<u>Bài 18 :</u> Cho các hàm cầu $Q_1 = 40 - P_1$; $Q_2 = 30 - 0.5\ P_2$

Hãy lập hàm doanh thu

$Q_1 = 40 - P_1 \Rightarrow P_1 = 40 - Q_1$

$Q_2 = 30 - 0.5\ P_2 \Rightarrow P_2 = 60 - 2Q_2$

$TR(Q) = P_1Q_1 + P_2Q_2$

$= (40 - Q_1)Q_1 + (60 - 2Q_2)Q_2$

$= - Q_1^2 - 2Q_2^2 + 40Q_1 + 60Q_2$

<u>Bài 19 :</u> Cho hàm sản xuất $Q = 10K^{0.3}L^{0.4}$. Giá thuê một đơn vị K bằng 3\$, giá thuê 1 đơn vị L bằng 2\$ và giá sản phẩm là P = 4. Hãy lập hàm lợi nhuận π(K,L)

Tổng chi phí: TC= 3K + 2L

Doanh thu: $TR = PQ = 40K^{0.3}L^{0.4}$

Lợi nhuận: $\pi = TR - TC = 40K^{0.3}L^{0.4} - 3K - 2L$

<u>Bài 20 :</u> Cho hàm sản xuất $Q = 20K^{1/4}L^{3/4}$.

Hãy tìm sản lượng cận biên tại K = 16, L = 81. Giải thích ý nghĩa

$\frac{\partial Q}{\partial K} = 5K^{-0.75}L^{3/4}$

$\frac{\partial Q}{\partial L} = 15K^{1/4}L^{-1/4}$

Với K = 16, L = 81

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial K} = 5K^{-0.75}L^{3/4} = 16.875$

$\frac{\partial Q}{\partial L}$ = $15K^{1/4}L^{-1/4}$ = 10

Ý nghĩa:

+ Khi vốn tăng 1 đơn vị thì sản lượng tăng 16.875 đơn vị

+ Khi lao động tăng 1 đơn vị thì sản lượng tăng 10 đơn vị

Bài 21 : Cho hàm hữu dụng TU(x_1;x_2) = $2.\sqrt[3]{x_1}.\sqrt{x_2}$

Hãy tính lợi ích cận biên của hàng hóa 1, 2 tại mức tiêu dùng tương ứng 64 và 25. Giải thích ý nghĩa

Ta có :

$$MU_{x_1}(x_1;x_2) = TU_{x_1}'(x_1;x_2) = \frac{\partial TU}{\partial x_1}(x_1;x_2) = \frac{2}{3}x_1^{\frac{-2}{3}}.x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$=> MU_{x_1}(64;25) = TU_{x_1}'(64;25) = \frac{\partial TU}{\partial x_1}(64;25) = \frac{5}{24}$$

Ý nghĩa :

Tại x_1 = 64, x_2 = 25 nếu tăng thêm 1 đơn vị x và y không đổi, thì lợi ích sẽ

tăng $\frac{5}{24}$ đơn vị.

$$MU_{x_2}(x_1;x_2) = TU_{x_2}'(x_1;x_2) = \frac{\partial TU}{\partial x_2}(x_1;x_2) = x_1^{\frac{1}{3}}.x_2^{\frac{-1}{2}}$$

$$=> MU_{x_2}(64;25) = TU_{x_2}'(64;25) = \frac{\partial TU}{\partial x_2}(64;25) = \frac{4}{5}$$

Ý nghĩa :

Tại x_1 = 64, x_2 = 25 nếu tăng thêm 1 đơn vị x và y không đổi, thì lợi ích sẽ

tăng $\frac{4}{5}$ đơn vị.

Bài 22 : Cho hàm cầu : D = $0,4.Y^{0,2}.P^{-0,3}$. Hãy tính $\varepsilon_{D/Y}$ và $\varepsilon_{D/P}$

a) $\varepsilon_{D/Y} = D'_Y.\frac{Y}{D}$

$= 0{,}4.0{,}2.Y^{-0,8}.P^{-0,3}.\ \frac{Y}{0{,}4.Y^{0,2}.p^{-0,3}} = 0{,}2$

b) $\varepsilon_{D/P} = D'_Y.\frac{Y}{P}$

$= -0{,}4.0{,}3.Y^{0,2}.P^{-1,3}.\ \frac{P}{0{,}4.Y^{0,2}.p^{-0,3}} = -\ 0{,}3$

Bài 23 :

Tính hệ số co dãn của các hàm sau tại điểm cho trước

a) $Q(P_1;P_2) = 6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2$ tại (20;30)

$\varepsilon_{Q/P_1} = Q'_{P_1}.\frac{P_1}{D} = -4P_1.\frac{P_1}{6300-2P_1^2-\frac{5}{3}P_2^2} = \frac{-2}{5}$

$\varepsilon_{Q/P_2} = Q'_{P_2}.\frac{P_2}{D} = -4P_2.\frac{P_2}{6300-2P_1^2-\frac{5}{3}P_2^2} = \frac{-3}{4}$

$\varepsilon_Q = \varepsilon_{Q/P_1} + \varepsilon_{Q/P_2} = \frac{-2}{5} + \frac{-3}{4} = \frac{-23}{40} = -1{,}15$

b) $Q(K;L) = 120K^{1/3}L^{2/3}$

$\varepsilon_{Q/K} = Q'_K.\frac{K}{Q} = 120.\frac{1}{3}.K^{-2/3}L^{2/3}.\frac{K}{120K^{1/3}L^{2/3}} = \frac{1}{3}$

$\varepsilon_{Q/L} = Q'_L.\frac{L}{Q} = 120.\frac{2}{3}.K^{1/3}L^{-1/3}.\frac{L}{120K^{1/3}L^{2/3}} = \frac{2}{3}$

$\varepsilon_Q = \varepsilon_{Q/K} + \varepsilon_{Q/L} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

Bài 24 : Cho hàm sản xuất $Y(t) = 0{,}2K^{0,4}L^{0,8}$

Trong đó $K = 120 + 0{,}1t$; $L = 300 + 0{,}3t$

a. Tính hệ số co dãn của Y theo K, L

Ta có : $Y = 0{,}2K^{0,4}L^{0,8}$

$$\varepsilon_{(K|L)} = \frac{\partial Y}{\partial K} . \frac{K}{Y} = \frac{0,2.0,4.K^{-0,6}L^{0,8}K}{0,2.K^{0,4}L^{0,8}} = 0,4$$

$$\varepsilon_{(Y|L)} = \frac{\partial Y}{\partial L} . \frac{L}{Y} = \frac{0,2.0,8.K^{0,4}L^{-0,2}L}{0,2.K^{0,4}L^{0,8}} = 0,8$$

b. Tính hệ số tăng trưởng của K, L và Y

Hệ số tăng trưởng của vốn K

$$r_K = \frac{\partial K}{\partial t} . \frac{1}{K} = \frac{0,1}{120+0,1t}$$

Hệ số tăng trưởng của vốn L

$$r_L = \frac{\partial L}{\partial t} . \frac{1}{L} = \frac{0,3}{300+0,3t} = \frac{0,1}{100+0,1t}$$

Hệ số tăng trưởng của Y :

$$r_Y = \frac{\partial Y}{\partial t} . \frac{1}{Y} = \frac{0,2\ [0,4\ .0,1(120+0,1t)^{-0,6} + 0,8\ .0,3(300+0,3t)^{-0,2}}{0,2(120+0,1t)^{0,4}(300+0,3t)^{0,8}}$$

$$= \frac{0,04(120+0,1t)^{-0,6} + 0,24(300+0,3t)^{-0,2}}{(120+0,1t)^{0,4}(300+0,3t)^{0,8}}$$

$$= \frac{0,04}{120+0,1t} + \frac{0,24}{300+0,3t} = \frac{0,04}{120+0,1t} + \frac{0,08}{100+0,1t}$$

c. Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất trong trường hợp này

Ta có : $\varepsilon_Y = \varepsilon_{Y/K} + \varepsilon_{Y/L}$ = 0,4 + 0,8 = 1,2

Nếu trong điều kiện các yếu tố khác không đổi, nếu K và L tăng lên 1% thì Y tăng lên 1,2%

<u>Bài 25 :</u> Cho hàm sản xuất Y(t) = $5K^{0,6}L^{0,3}$

a. Tính Hệ số thay thế của K cho L

Ta có : Y = $5K^{0,6}L^{0,3}$

Hệ số thay thế của K cho L là :

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = -\frac{5.0,3K^{0,6}L^{-0,7}}{5.0,6K^{-0,4}L^{0,3}} = -\frac{K}{2L}$$

b. Cho biết chi phí đơn vị vốn $w_K = 5$, chi phí đơn vị lao động $w_L = 3$. Tính mức sử dụng tối ưu vốn và lao động để đạt mức sản lượng cho trước $Y_0 = 30000$

Doanh nghiệp sử dụng tối đa vốn và lao động khi : $TC(K, L) = w_K K + w_L L \rightarrow \min$

$\Leftrightarrow TC = 5K + 3L \rightarrow \min$

Ta có : $Y(t)= Y_0 \Leftrightarrow 5K^{0,6}L^{0,3} = 30000$

Lập hàm Lagrange :

$f(K, L, \lambda)= TC(K, L) + \lambda(Y_0 - Y(t))= 5K + 3L + \lambda(30000-5K^{0,6}L^{0,3})$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial K} = 5 - 3\lambda K^{-0,4}L^{0,3} \text{ ; } \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} = 1,2\lambda K^{-1,4}L^{0,3} \\ \frac{\partial f}{\partial L} = 3 - 1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7} \text{ ; } \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} = \frac{21}{20}\lambda K^{0,6}L^{-1,7} \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 30000 - 5K^{0,6}L^{0,3}; \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial L} = -0,9K^{-0,4}L^{-0,7} \end{cases}$$

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial K} = 5 - 3\lambda K^{-0,4}L^{0,3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial L} = 3 - 1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 30000 - 5K^{0,6}L^{0,3} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3} = \frac{3\lambda K^{-0,4}L^{0,3}}{1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7}} \\ 30000 = 5K^{0,6}L^{0,3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6} = \frac{L}{K} \\ 6000 = K^{0,6}L^{0,3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 16762 \\ L = 13968 \end{cases} \Rightarrow \lambda=23$

$\Rightarrow$ tọa độ điểm dừng của f là: $(K,L,\lambda)=(16762, 13968, 23)$

Xét vi phân toàn phần cấp 2:

$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} d^2K + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} d^2L + 2\frac{\partial f}{\partial K \partial L} dKdL = 1,2\lambda K^{-1,4}L^{0,3} d^2K + \frac{21}{20}\lambda K^{0,6}L^{-1,7} d^2L - 2.\ 0,9K^{-0,4}L^{-0,7}\ dKdL$

Đặt $g(K;L)= 5K^{0,6}L^{0,3}$, ta có hàm vi phân toàn phần cấp 1 là :

$\frac{\partial g}{\partial K}dK+\frac{\partial g}{\partial L}dL = 0$ (1)

$\frac{\partial g}{\partial K} = 3K^{-0,4}L^{0,3}$; $\frac{\partial g}{\partial L} = 1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7}$;

Thay vào (1) ta được : $3K^{-0,4}L^{0,3}$dK +$1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7}$dL = 0

⇔ dL=$\frac{-3K^{-0,4}L^{0,3}}{1,5\lambda K^{0,6}L^{-0,7}}dK \Rightarrow \frac{dL}{dK} = -\frac{2L}{K} \Rightarrow dKdL = \frac{-2L}{K}d^2K \leq 0$

Thay $dKdL = \frac{-2L}{K}d^2K \leq 0$ $vào$ d^2f, ta được

$d^2f = 1,2\lambda K^{-1,4}L^{0,3}d^2K + \frac{21}{20}\lambda K^{0,6}L^{-1,7}d^2L + 2.\ 0,9K^{-0,4}L^{-0,7}.\frac{2L}{K}d^2K$

$\Rightarrow d^2f \geq 0$

Vậy TC_{min} khi K=16762, L=13968.

Bài 26: **Thu nhập quốc dân (Y) của một quốc gia có dạng: Y= 0.48 $K^{0.4}L^{0.3}NX^{0.01}$**

Trong đó : K là vốn, L là lao động và NX là xuất khẩu ròng.

a) **Khi tăng 1% lao động sẽ ảnh hưởng như thế nào đến thu nhập?
Có ý kiến cho rằng giảm mức lao động xuống 2% thì có thể tăng xuất khẩu ròng 15% mà cho biết thu nhập vẫn không đổi , cho biết điều này đúng hay sai?**
b) **Cho nhịp tăng trưởng của NX là 4% của K là 3%, của L là 5%. Xác định nhịp tăng trưởng của Y.**

Giải:

a)* Ta có:

$\varepsilon_{Y/L} = \frac{\partial Y}{\partial L}.\frac{L}{Y} = 0,3$

Vậy khi tăng lao động 1% thì thu nhập tăng 0,3%

⇒khi giảm mức lao động xuống 2% thì thu nhập giảm : 0,3.2 = 0,6%

$\varepsilon_{Y/NX} = \frac{\partial Y}{\partial NX}.\frac{NX}{Y} = 0,01$

⇒khi tăng xuất khẩu ròng lên 15% thì thu nhập tăng: 0,01.15 = 0.15%

Vậy khi ta đồng thời giảm lao động xuống 2% và tăng xuất khẩu ròng lên 15% thì thu nhập thay đổi: -0,6% + 0,15% = -0,45

$\Rightarrow$ Khẳng định trên là sai.

b) Ta có:

$\varepsilon_{Y/K} = 0,4$; $r_k=3$

$\varepsilon_{Y/L} = 0,3$; $r_L=5$

$\varepsilon_{Y/NX} = 0,01$; $r_{NX}=4$

Vậy nhịp tăng trưởng của Y là:

$r_Y = \varepsilon_{Y/K} .r_K + \varepsilon_{Y/L} . r_L + \varepsilon_{Y/NX} . r_{NX}$

$= 0,4.3 + 0,3.5 + 0,01.4 = 2,74\%$

Bài 27: **Giả sử dân số tăng theo mô hình $P(t) = P(0)2^{bt}$ và tiêu dùng của dân cư tăng theo mô hình $C(t)= C(0)e^{at}$.**

a) **Tính hệ số tăng trưởng của dân số và tiêu dùng của dân cư.**
b) **Với điều kiện nào thì hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số. Nêu ý nghĩa của quan hệ đó.**
c) **Giả thiết lượng lao động được sử dụng tỉ lệ với dân số và có dạng $L(t)= kP(t)$ $(k<1)$; sản lượng $Y(t)$ là một hàm vốn $K(t)$ và lao động có dạng Cobb - Doughlas và $C(t)$ là một hàm tuyến tính của $Y(t)$. Xác định một mô hình thể hiện mối quan hệ giữa các biến.**

Giải:

a) Hệ số tăng trưởng của dân số:

$$r_p = \frac{\partial P(t)/\partial t}{P(t)} = \frac{b\ln 2P(0)2^{bt}}{P(0)2^{bt}} = b\ln 2$$

Hệ số tăng trưởng tiêu dùng của dân cư:

$$r_c = \frac{\partial C(t)/\partial t}{P(t)} = \frac{aC(0)e^{at}}{C(0)e^{at}} = a$$

b) Hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số khi a > bln2.
Ý nghĩa: khi dân số tăng trưởng với tốc độ là bln2% thì tiêu dùng của dân cư tăng trưởng nhanh hơn với tốc độ a%.

c) Hàm sản lượng Y(t) theo vốn K(t) và lao động L(t) có dạng:

$Y(t) = f(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$

Mà L(t)=kP(t)=k2^{bt}

$\Rightarrow Y(t) = f(K, L) = aK^{\alpha}k^{\beta}2^{\beta bt}$

Với hàm tiêu dùng C(t) là một hàm tuyến tính của Y(t), ta có:
C(t)=b+cY

$\Leftrightarrow e^{at} = b + cak^{\beta}2^{\beta bt}K^{\alpha}$

<u>Bài 28:</u> Cho hàm tổng chi phí : TC= Q^3- 5Q + 14Q+ 144

a) **Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q= 2.**
b) **Cho giá sản phẩm là P= 70, với mức thuế doanh thu 20%, tính lợi nhuận khi Q=3.**

<u>Giải :</u>

a) Hệ số co giãn của TC theo Q:

$$\varepsilon_{TC/Q} = TC'.\frac{Q}{TC} = \frac{(3Q^2 - 10Q + 14)Q}{Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144} = 3 + \frac{5Q^2 - 28Q - 432}{Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144}$$

Hệ số co giãn của TC theo Q với Q=2:

$$\varepsilon_{TC/Q(2)} = 3 + \frac{5.2^2 - 28.2 - 432}{2^3 - 5.2^2 + 14.2 + 144} = 0,075$$

b) Khi Q=3, $TC = 3^3 - 5.3^2 + 14.3 + 144 = 168$
Doanh thu của doanh nghiệp: TR=P.Q=70.3=210
Thuế doanh thu: T=20%.TR=0,2.210=42
Lợi nhuận của công ty: $\pi = TR - T - TC = 210 - 168 - 42 = 0$

<u>Bài 29:</u> Cho nhu cầu hai mặt hàng phụ thuộc vào giá như sau:

Q_1= 40-2P_1-P_2 ; Q_2= 35-P_1-P_2

Hàm tổng chi phí là TC= Q_1^2+2Q_2^2+ 12. Trong đó Q_{i},, , P_i là sản lượng và giá của hàng hóa,

a) **Xác định Q_1, Q_2 sao cho tổng lợi nhuận là lớn nhất.**
b) **Xác định chi phí biên cho từng mặt hàng tối ưu tìm được câu a.**
c) **Hai mặt hàng này có thay thế cho nhau được không.**

Giải:

a) $\begin{cases} Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2 \\ Q_2 = 35 - P_1 - P_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 5 - Q_1 + Q_2 \\ P_2 = 30 + Q_1 - 2Q_2 \end{cases}$

TR$(Q_{1,}Q_2) = P_1.Q_1 + P_2.Q_2$

$= (5 - Q_1 + Q_2)Q_1 + (30 + Q_1 - 2Q_2)Q_2$

$= -{Q_1}^2 - 2{Q_2}^2 + 5Q_1 + 30Q_2 + 2Q_1.Q_2$

$\pi(Q_1, Q_2) = TR - TC$

$= -{Q_1}^2 - 2{Q_2}^2 + 5Q_1 + 30Q_2 + 2Q_1.Q_2 - {Q_1}^2 - 2{Q_2}^2 - 12$

$= -2{Q_1}^2 - 4{Q_2}^2 + 5Q_1 + 30Q_2 + 2Q_1.Q_2 - 12$

Tìm Q_1, Q_2 để lợi nhuận cực đại

Đạo hàm riêng của $\pi(Q_1, Q_2)$:

$\pi'(Q_1) = -4Q_1 + 5 + 2Q_2$

$\pi'(Q_2) = -8Q_2 + 30 + 2Q_1$

$\pi''({Q_1}^2) = -4$

$\pi''({Q_2}^2) = -8$

$\pi''(Q_1, Q_2) = 2$

Tìm điểm dừng $\begin{cases} \pi'(Q_1) = -4Q_1 + 5 + 2Q_2 = 0 \\ \pi'(Q_2) = -8Q_2 + 30 + 2Q_1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = \frac{25}{7} \\ Q_2 = \frac{65}{14} \end{cases}$

Điểm dừng là : $\begin{cases} Q_1 = \frac{25}{7} \\ Q_2 = \frac{65}{14} \end{cases}$

Tại điểm dừng, ta có:

A = $\pi''({Q_1}^2) = -4 < 0$

B = $\pi''(Q_1, Q_2) = 2$

C = $\pi''\left({Q_2}^2\right) = -8$

Xét AC – B^2 = 28 > 0

Vậy tại điểm dừng $Q_1 = \frac{25}{7}$ và $Q_2 = \frac{65}{14}$ thì lợi nhuận cực đại.

b) MC(Q_1) $= TC'(Q_1) = 2Q_1$
MC(Q_2) $= TC'(Q_2) = 4Q_2$
Với $Q_1 = \frac{25}{7}$ và $Q_2 = \frac{65}{14}$, ta có:
MC(Q_1) $= 2.\frac{25}{7} = \frac{50}{7}$
MC(Q_2) $= 4.\frac{65}{14} = \frac{130}{7}$

c) Ta có: Hệ số thay thế của Q_1, Q_2 là
$\frac{dQ_1}{dQ_2} = -\frac{\partial TC/\partial Q_2}{\partial TC/\partial Q_1} = -\frac{4Q_2}{2Q_1} = -2\frac{Q_2}{Q_1} < 0$ (Vì $Q_1, Q_2 \geq 0$)
Vậy hai mặt hàng này có thể thay thế cho nhau. Khi Q_2 tăng 1 đơn vị để mức lợi nhuận không đổi thì Q_1 giảm 2 đơn vị.

Bài 30: Cho hàm tổng chi phí TC= 5000 + $\frac{5Q^2}{Q+3}$

a) Tìm hàm chi phí biên MC
b) Tính chi phí trung bình AC tại Q=100
c) **Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q=17**

Giải :

Ta có hàm tổng chi phí là : TC= 500 + $\frac{5Q^2}{Q+3}$

a) Hàm chi phí biên là :

MC=TC’ = (500 + $\frac{5Q^2}{Q+3}$)’ = $\frac{5Q^2+30}{(Q+3)^2}$

b) Hàm chi phí trung bình AC là :

AC= $\frac{TC}{Q} = \frac{5000}{Q} + \frac{5Q}{Q+3}$, tại Q= 100 ta được AC(Q=100)= $\frac{5650}{103}$.

c) Hệ số co giãn của TC theo Q là :

$\varepsilon_{TC/Q}= \frac{\partial TC}{\partial Q} \cdot \frac{Q}{TC} = \frac{Q.(5Q2 + 30) / (Q+3)2}{\frac{5000}{Q} + \frac{5Q}{Q+3}}$ tại Q=17 ta được

$\varepsilon_{TC/Q(17)}$= 0.0164 .

<u>Bài 31:</u> Cho mô hình cung –cầu như sau:

Q_D= 10 + 0,1Y -0,2P

Q_S= -14 + 0,6P

Trong đó Q_D, Q_S cung cấp và nhu cầu một loại hàng; Y là thu nhập trong dân cư (theo đầu người); P là giá cả.

a) Tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là:

a.1. $Q_D = Q_S$

a.2. $Q_D =0,9Q_S$

b) Tính hệ số co dãn của giá cân bằng theo Y tại 80 trong cả hai trường hợp trên. Giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả tính được.

<u>Giải :</u>

a) tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là :

a1. Biểu thức giá cân bằng:

$$Q_D = Q_S$$
$$\Leftrightarrow 10 + 0.1Y - 0.2P = -14 + 0.6P$$
$$\Leftrightarrow 24 + 0.1Y = 0.8P$$
$$\Leftrightarrow P = 30 + \frac{1}{8}Y$$

a2. Biểu thức cân bằng :

$Q_D = 0,9\ Q_S \leftrightarrow 10 + 0,1Y – 0,2P= 0,9\ (-14 + 0,6P)$

$\leftrightarrow P = \frac{1130}{37} + \frac{5Y}{37}$

b) Tính hệ số co giãn của giá cân bằng theo Y tại 80 trong cả hai trường hợp trên.

a1. $\varepsilon_{(P/Y=80)} = \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{P} = \frac{1}{8} \cdot \frac{80}{30+\frac{80}{8}} = 0{,}25$

Ý nghĩa: Khi Y thay đổi 1% thì P thay đổi 0.25%

a2. $\varepsilon_{(P/Y=80)} = \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{P} = \frac{5}{37} \cdot \frac{80}{\frac{1130}{37} + \frac{5}{37}.80} = \frac{40}{153}$

Ý nghĩa : Khi Y thay đổi 1% thì P thay đổi $\frac{40}{153}$%.

<u>Bài 32:</u> Cho hàm lợi ích tiêu dùng của một chủ thể có dạng như sau :

ln(TU(x,y))= 0.7lnx + 0,3lny

Cho biết x, y là khối lượng các hàng hóa. Cho p,q là giá các hàng hóa tương ứng, M là ngân sách tiêu dùng.

a) Có ý kiến cho rằng , nếu chủ thể tăng tiêu dùng x lên 1% và giảm tiêu dùng y đi 3% thì lợi ích tiêu dùng không đổi. Điều đó đúng hay sai.
b) Xác định phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó.

<u>Giải:</u>

Ta có : ln(TU(x,y))= 0,7lnx + 0,3lny ⇔ $e^{\ln(TU(x,y))} = e^{(0,7\ln x + 0,3\ln y)}$ ⇔ TU= $x^{0,7}y^{0,3}$

a) Ta có: hệ số co giãn của TU theo x là :

$\varepsilon_{TU/x} = \frac{\partial TU}{\partial X} \cdot \frac{X}{TU} = 0{,}7x^{-0,3}y^{0,3}\frac{x}{x^{0,7}y^{0,3}} = 0{,}7$

⇒khi tăng tiêu dùng x lên 1% thì thu nhập tăng 0,7%

$\varepsilon_{TU/y} = \frac{\partial TU}{\partial y} \cdot \frac{y}{TU} = 0{,}3x^{0,7}y^{-0,7}\frac{y}{x^{0,7}y^{0,3}} = 0{,}3$

⇒khi giảm tiêu dùng y đi 3% thì thu nhập giảm: 0,3.3 = 0,9%

Vậy khi ta đồng thời tăng tiêu dùng x lên 1% và giảm tiêu dùng y đi 3% thì thu nhập thay đổi: 0,7% + (-0,9%) = -0,2%, hay thu nhập giảm 0,2%

⇒ Khẳng định trên là sai.

c) Phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó:

Ta có : M = px+qy

Mặc khác : ln(TU(x,y))= 0.7lnx + 0,3lny ⇔ $e^{\ln(\mathrm{TU(x,y)})} = e^{0.7\ln x + 0,3\ln y}$

⇔ TU = $x^{0,7}y^{0,3}$

Yêu cầu : xác định phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó .

Tìm x,y để TU tối ưu với điều kiện ràng buộc là g = M – px –qy

Lập hàm Lagrange:

L(x,y,λ)= TU +λg= $x^{0,7}y^{0,3}$ +λ(M− px−qy)

Tìm các đạo hàm riêng :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0{,}7x^{-0,3}y^{0,3} - \lambda p \;;\; \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -0{,}21x^{-1,3}y^{0,3} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0{,}3x^{0,7}y^{-0,7} - \lambda q \;;\; \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -0{,}21x^{0,7}y^{-1,7} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathrm{M - px - qy} \;;\; \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0{,}21x^{-0,3}y^{-0,7} \end{cases}$$

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0{,}7x^{-0,3}y^{0,3} - \lambda p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0{,}3x^{0,7}y^{-0,7} - \lambda q = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathrm{M - px - qy} = 0 \end{cases}$

↔ $\begin{cases} x = \frac{7M}{10p} \\ y = \frac{3M}{10q} \end{cases}$ Vậy điểm dừng $\begin{cases} x = \frac{7M}{10p} \\ y = \frac{3M}{10q} \end{cases}$

Tại điểm dừng ta xét hàm vi phân toàn phần cấp hai :

$d^2L(x,y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial xy}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2$

$= -0{,}21x^{-1,3}y^{0,3}dx^2 + 0{,}42x^{-0,3}y^{-0,7}dxdy - 0{,}21x^{0,7}y^{-1,7}dy^2$

Đặt g(x,y) = M− px−qy

Với dx,dy thỏa phương trình sau:

dg= $\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}$dy = 0 ↔ pdx + qdy=0 ↔ dx= $-\frac{q}{p}dy$ → $d^2L(x,y) < 0$

Vậy phương án tiêu dùng tối ưu nhất tại $\begin{cases} x = \frac{7M}{10p} \\ y = \frac{3M}{10q} \end{cases}$

Bài 33: **Mỗi cá nhân sẽ được lợi từ thu nhập (INCOME) và nghỉ ngơi (LEISURE). Giả sử mỗi ngày có 12 giờ để chia ra thời gian làm việc và nghỉ ngơi.**

Tiền lương của mỗi giờ làm việc là 3$ và hàm lợi ích của cá nhân là TU= $L^{0,5}I^{0,75}$

Trong đó : L là số giờ nghỉ, I là thu nhập

Cá nhân này sẽ cân đối thời gian nghỉ ngơi và làm việc thế nào để tối đa hóa lợi ích của mình?

Giải:

$TU = L^{0,5}I^{0,75}$

Với điều kiện: $L+\frac{I}{3}=12$. Đặt $f(L,I,\lambda)=L^{0,5}I^{0,75}-\lambda(L+\frac{I}{3}-12)$

Tọa độ điểm dừng:

$$\begin{cases}\frac{\partial f(L,I,\lambda)}{\partial L}=0\\ \frac{\partial f(L,I,\lambda)}{\partial I}=0\\ \frac{\partial f(L,I,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}I^{0,75}L^{-0,5} \quad -\lambda=0\\ \frac{3}{4}I^{-0,25}L^{0,5} \quad -\frac{\lambda}{3}=0\\ L \quad +\frac{I}{3}=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}I^{0,75}L^{-0,25}}{\frac{3}{4}I^{-0,25}L^{0,5}}=\frac{1}{3}\\ L \quad +\frac{I}{3}=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2I}{3L}=3\\ L+\frac{2L}{3}=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}L=4,8\\ I=21,8\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(L,I,\lambda)}{\partial L^2}=\frac{-1}{4}I^{0,75}L^{1,5}$$

$$\frac{\partial^2 f(L,I,\lambda)}{\partial I^2}=\frac{-3}{16}I^{-1,25}L^{0,5}$$

$$\frac{\partial^2 f(L,I,\lambda)}{\partial L\partial I}=\frac{3}{8}I^{-0,25}L^{-0,5}$$

Ta có : $dg=\frac{\partial f(x)}{\partial L}dL+\frac{\partial f(x)}{\partial I}dI=0$

$$\Rightarrow dl = \frac{-dI}{3}$$

$$d^2 f(4,8;21,8) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial L^2} dL^2 + 2\frac{\partial^2 f(x)}{\partial L \partial I} dLdI + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial I^2} dI^2$$

$$= \frac{-1}{4} I^{0,75} L^{-1,5} dl^2 + \frac{3}{4} I^{-0,25} L^{-0,5} dLdI + \frac{-3}{16} I^{-1,25} L^{0.5} dI^2$$

$$= \frac{-1}{4} I^{0,75} L^{-1,5} dl^2 + \frac{-1}{4} I^{-0,25} L^{0,5} dI^2 + \frac{-3}{16} I^{-1,25} L^{0,5} dI^2 < 0$$

$$TU_{max}\ khi\ L = 4,8; I = 21,8$$

<u>Bài 34 :</u> Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế (đóng) có mối liên hệ như sau: Y= C+ I+G;,

$C=0,85Y_d + 70$; $Y_d = Y-T$

Trong đó: Y là thu nhập quốc dân. C là tiêu dùng dân cư, Y_d thu nhập khả dụng, I đầu tư, G là chi tiêu chính phủ, T thuế. Với I=200, G=550, T=500. Hãy:

a) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng

b) Phân tích chủ trương kích càu của chính phủ thông qua chính sách giảm thuế.

<u>Giải:</u>

a) Thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng:

$$Y = C + I + G = 0,85Y_d + 70 + 200 + 550 = 0,85(Y - T) + 70 + 200 + 550 = 0,85Y - 425 + 200 + 550$$

$$\Leftrightarrow 0,15Y = 395$$

$$\Leftrightarrow Y \quad = 2633,3$$

b) Khi giảm thuế thì đầu tư tăng, dẫn đến đầu tư tăng, sản lượng tăng, thu nhập người dân tăng nên tăng tiêu dùng.

<u>Bài 35:</u> Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế có mối liên hệ sau

Y= C+ I+G+X-M; $C=0,08Y_d$; $M= 0,015Y_d$; $Y_d= (1-t)Y$

Trong đó Y là thu nhập quốc dân; C là tiêu dùng dân cư; Y_d thu nhập khả dụng, I đầu tư, G là chi tiêu chính phủ; X là xuất khẩu, M là nhập khẩu, t là thuế.

Với I= 700, G= 900. X=600, t= 0,15. Hãy

a) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.

b) Vói chỉ tiêu ở câu a, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng đến thu nhập. Hãy xem xét ý kiến này.

Giải:

$\begin{cases} Y = C + I + G + X - 0{,}015(1-t)Y \\ C = 0{,}08(1-t)Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C + 0{,}015(1-t)Y = I + G + X \\ 0{,}08(1-t)Y - C = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1{,}015 - 0{,}015t)Y - C = I + G + X \\ 0{,}08(1-t)Y - C = 0 \end{cases}$

Phương pháp định thức:

$A = \begin{pmatrix} 1{,}015 - 0{,}015t & -1 \\ 0{,}08(1-t) & -1 \end{pmatrix}$

DetA = -1$(1{,}015 - 0{,}015t) + 0{,}08(1-t)$

= -0,935 – 0,065t

$A_1 = \begin{pmatrix} I + G + X & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Det$A_1 = -I - G - X$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1{,}015 - 0{,}015t & I + G + X \\ 0{,}08(1-t) & 0 \end{pmatrix}$

Det$A_2 = (0{,}08 + 0{,}08t)(I + G + X)$

Với t ≥ 0 ta có DetA = -0,935 – 0,065t ≠ 0, suy ra :

Y = $\frac{detA_1}{\det A} = \frac{-I-G-X}{-0{,}935 - 0{,}065t} = \frac{I+G+X}{0{,}935 + 0{,}065t}$

a) Thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng là:

Y = $\frac{I+G+X}{0{,}935 + 0{,}065t}$với I = 700, G = 900, X = 600, t = 0,15→ Y = 2328,66

b) Hệ số co giãn của Y(X)

$$E_{Y/X} = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{1}{0{,}935\ + 0{,}065\text{t}} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{500}{12937}$$

Hệ số co giản củaY(G)

$$E_{Y/G} = \frac{\partial Y}{\partial G} \cdot \frac{G}{Y} = \frac{1}{0{,}935\ + 0{,}065\text{t}} \cdot \frac{G}{Y} = \frac{750}{12937}$$

Nếu giảm xuất khẩu 10% thì thu nhập giảm $\frac{5000}{12937}$

Nếu tăng chi tiêu 10% thì thu nhập tăng $\frac{7500}{12937}$

Vậy ý kiến trên sai.

<u>Bài 36:</u> Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng: Q= K(L+5); trong đó K, L lần luột là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là 70 và giá một đơn vị lao động là 20.

a) **Nếu doanh nghiệp nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Tính mức sử dụng vốn và lao động sao cho việc sản xuất sản lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất.**
b) **Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K,L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của các hệ số đó.**
c) **Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó.**

<u>Giải:</u>

a) Q=K(L+5)=5600

TC= 70K+20L → min

Hàm Lagrange: f(K, L, λ) = 70K+20L+ λ(5600 – K(L+5))

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial K} = 70 - \lambda(L+5) \\ \frac{\partial f}{\partial K} = 20 - \lambda K \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 5600 - K(L+5) \end{cases}$$

Tìm điểm dừng: $\begin{cases} 70 - \lambda(L+5) = 0(1) \\ 20 - \lambda K = 0(2) \\ 5600 - K(L+5) = 0(3) \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{70}{20} = \frac{\lambda(L+5)}{\lambda K} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = \frac{L+5}{K} \Leftrightarrow$ L=$\frac{7}{2}K - 5$

Thay L=$\frac{7}{2}K - 5$ vào (3) ta được:

5600- K($\frac{7}{2}K - 5$ +5) = 0

$\Leftrightarrow$ 5600- $\frac{7}{2}K^2 = 0 \Leftrightarrow K = 40 \Rightarrow$ L=135, λ = $\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L} = -\lambda$$

$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} d^2K + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} d^2L + 2\frac{\partial f}{\partial K \partial L} dKdL = -dKdL$

Đặt g(K;L)= K(L+5)

$\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = L + 5;\ \frac{\partial Q}{\partial L} = K$$

Thay vào g(K;L) ta được : (L+5)dK +KdL = 0

Với L= 135, K=40, ta được:

140dK + 40dL= 0 $\Leftrightarrow$ dL=$\frac{-140}{40} dK$

Thay dL=$\frac{-140}{40} dK$ $vào\ d^2 f, ta$ được $d^2 f = -dK \frac{-140}{40} dK = \frac{140}{40} dK^2 > 0$

Vậy TC_{min} khi K=40, L=135.

b) $\frac{\partial Q}{\partial K} = L + 5;\ \frac{\partial Q}{\partial L} = K$

$\frac{dK}{dL} = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial K}}{\frac{\partial Q}{\partial L}} = \frac{-(L+5)}{K} = \frac{-140}{40} = \frac{-7}{2}$

Vậy khi lao động tăng 1 đơn vị thì giá vốn sẽ giảm 7/2 đơn vị.

c) TC= 70K+20L = 5500

MC= TC'(Q) =λ = $\frac{1}{2}$

$\varepsilon_{TC/Q}$= TC'(Q)× $\frac{Q}{TC} = \frac{1}{2} . \frac{5600}{5500} = \frac{28}{55}$

Khi sản lượng tăng lên 1% thì chi phí tăng 28/55 %.

<u>Bài 37:</u> Một công ty có hàm sản xuất Q= 0,5K(L-2) trong đó K,L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là p_k= 120 và giá một đơn vị lao động là p_L=60.

a) **Nếu doanh nghiệp chi số tiền là 3000. Tính mức sử dụng vốn và lao động để tối ưu hóa sản lượng?**
b) **Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K,L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?**
c) **Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?**

<u>Giải:</u>

a) Q=0.5K(L-2)

TC= 120K + 60L=3000.

Hàm Lagrange : f(K;L;λ)= 0,5K(L-2) +λ(3000-120K-60L)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial K} = 0,5(L-2) + \lambda(-120) = 0,5(L-2) - 120\lambda \\ \frac{\partial f}{\partial L} = 0,5K - 60\lambda \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 3000 - 120K - 60L \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5(L-2) - 120\lambda = 0 \\ 0,5K - 60\lambda = 0 \\ 3000 - 120K - 60L = 0 \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{0,5(L-2)}{0,5K} = \frac{120\lambda}{60\lambda} \Leftrightarrow \frac{L-2}{K} = 2 \Leftrightarrow L = 2K + 2$$

Thay L=2K +2 vào (3), ta được: 3000=120K + 60L

⇔ 120K+60(2K+2)=3000⇔240K=2880⇔K=12⇨L=26⇨λ=0,1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L} = 0,5$$

$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} d^2K + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 L} d^2L + 2\frac{\partial f}{\partial K \partial L} dKdL = 2\times 0,5\, dKdL = dKdL$

Điều kiện: 3000= 120K+60L

Vi phân toàn phần cấp 1:

Đặt g(K;L)=120K+60L

$$\frac{\partial g}{\partial K} = 120; \frac{\partial g}{\partial L} = 60$$

$$\frac{\partial g}{\partial K} dK + \frac{\partial g}{\partial L} dL = 0$$

120dK +60dL =0

dL=-2dK

d^2f=dKdL=dK.-2dK=-2d^2K<0.

Vậy tối đa hóa sản lượng thì K=12, L=26, λ=0,1.

b) $\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{\frac{\partial f}{\partial L}} = \frac{-120}{60} = -2$

Khi lao động tăng 1 đơn vị thì vốn giảm 2 đơn vị.

c) $\varepsilon_{TC/Q}$= TC'(Q)×$\frac{Q}{Tc} = 0{,}1 \times \frac{144}{3000} = 0{,}0048.$

Khi sản lượng tăng 1% thì chi phí tăng 0,0048%.

Bài 38: Một công ty có hàm sản xuất Q= $K^{3/4}L^{1/2}$ (K là vốn. L là lao động). Biết giá một đơn vị p_k=30 và lao động p_L=5.

a) Công ty cần sản xuất 2048 sản phẩm, khi đó công ty nên sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và lao động để tối thiểu hóa chi phí.
b) Tại thời điểm tối thiểu hóa chi phí, nếu sản lượng tăng lên 2% thì chi phí sẽ thay đổi như thế nào?

Giải:

a) Q=$K^{3/4}L^{1/2}$=2048

TC=30K+5L→ min

Hàm Lagrange: f(K;L;λ)= 30K +5L + λ(2048-$K^{3/4}L^{1/2}$)

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 30 - \frac{3}{4}\lambda K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = 5 - \frac{1}{2}\lambda L^{-1/2}K^{3/4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2048 - K^{3/4}L^{1/2}$$

$$\begin{cases} 30 - \frac{3}{4}\lambda K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} = 0 \\ 5 - \frac{1}{2}\lambda L^{-1/2}K^{3/4} = 0 \\ 2048 - K^{3/4}L^{1/2} = 0 \end{cases}$$

$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{30}{5} = \frac{\frac{3}{4}\lambda K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\lambda L^{-1/2}K^{3/4}}$⇔L=4K

Thay L =4K vào (3), ta được: 2048- $K^{3/4}(4K)^{1/2}$=0⇔K=256 ⇨ L=1024, λ=5.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 K} = \frac{3}{16}\lambda.K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 L}= \frac{1}{4}\lambda.K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K\partial L} = \frac{-3}{8}\lambda K^{-\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{2}}$$

Tại M(256;1024;5)

$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 K}d^2$ K + $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 L}d^2$ L + $2\frac{\partial f}{\partial K\partial L}dKdL = \frac{15}{512}d^2$ K+ $\frac{5}{2048}d^2$ L - $\frac{15}{512}$dKdL

ĐK : 2048= $K^{3/4}L^{1/2}$

Đặt: g(K;L)= $K^{3/4}L^{1/2}$

Hàm vi phân toàn phần cấp 1

$$\frac{\partial g}{\partial K} = \frac{3}{4}K^{-1/4}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{1}{2}K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{1}{2}}$$

Thay K= 256, L=1024.

$\frac{\partial g}{\partial K}dK + \frac{\partial g}{\partial L}dL = 0$ ⇔ 6dK +dL = 0 ⇔ dL=-6dK

$d^2f = \frac{15}{512}dK^2 + \frac{5}{2048}(-6dK)^2 - \frac{15}{512}(-6dKdK) = \frac{75}{256}dK^2 > 0$

vậy TC_{min} khi K=256, L=1024.

b) Q=$K^{3/4}L^{1/2}$ =$256^{3/4}1024^{1/2}$=2048

TC=λ=5

$\varepsilon_{TC/Q}$=TC'(Q)×Q/TC= $5\times\frac{2048}{12800} = 0,8$

Khi sản lượng tăng 2% thì chi phí tăng 1,6%

<u>Bài 39:</u> Cho hàm sản xuất Y(t)= 0,4$K^{0,5}L^{0,9}$ trong đó K là vốn L là lao động.

a) **Nếu tăng vốn K thêm 9% thì có thể giảm bớt lao động L đi bao nhiêu % để Y không đổi?**
b) **Sang năm tiếp theo nếu tăng vốn K 15% , lao động L 10% thì Y biến động như thế nào?**
c) **Cho biết hiệu qua của việc tăng quy mô sản xuất của các hàm sản xuất trên.**

<u>Giải:</u>

a) $\varepsilon_{Y(t)/K}=\frac{\partial Y(t)}{\partial K}.\frac{K}{Y(t)} = 0,2.K^{-0,5}L^{0,9}\frac{K}{0,4K^{0,5}L^{0,9}}$=0,5

Khi K tăng 1% thì Y(t) tăng 0,5%

⇨ Khi K tăng 9% thì Y(t) tăng 4,5%

$\varepsilon_{Y(t)/L}=\frac{\partial Y(t)}{\partial L}\frac{L}{Y(t)} = 0,4.0,9L^{-0,1}K^{0,5}\frac{L}{0,5K^{0,5}L^{0,9}} = 0,9$

Khi L giảm 1% thì Y(t) giảm 0,9%

⇨Khi Y không đổi⇨ L giảm 5%

b) Khi K tăng 15% thì Y(t) tăng 7,5%

Khi L tăng 10% thì Y(t) tăng 9%

⇨ Y tăng 16,5%

c) Khi tăng vốn và lao động thì sản lượng cũng tăng theo.

<u>Bài 40:</u> Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y = C + I + G_0} \\ \boldsymbol{C = b_0 + b_1 Y} \\ \boldsymbol{I = a_0 + a_1 Y - a_2 R_0} \end{cases}$$

(a_0, a_1, b_0,b_1> 0; $a_1 + b_1$ <1)

Trong đó: G_0 là chi tiêu chính phủ, R_0 là lãi suất; I là đầu tủ, C là tiêu dùng, Y là thu nhập

a) **Hãy xác định Y, C ở trạng thái cân bằng.**
b) **Với b_0 =200, b_1= 0,7; a_0=100; a_1=0,2, a_2=10; R_0=7; G_0=500, khi tăng chi tiêu của chính phủ 1% thì thu nhập cân bằng thay đổi bao nhiêu %?**

Giải:

a) $Y = C + I + G = b_0 + b_1Y + a_0 + a_1Y - a_2R_0 + G_0$.

$Y = b_0 + a_0 - a_2R + G_0 + (a_1 + b_1)Y$

$\Rightarrow \frac{b_0 + a_0 - a_2R_0 + G_0}{1 - a_1 - b_1}$

$(a_1 + b_1 < 1 \Leftrightarrow 1 - (a_1 + b_1) = 0)$

b) $\varepsilon_{Y/G} = \frac{\partial Y}{\partial G_0} . \frac{G_0}{Y}$

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - a_1 - b_1}$$

Xét $b_0 = 200$; $b_1 = 0,7$

$a_0 = 100$; $a_1 = 0,2$

$a_2 = 10$; $R_0 = 7$; $G_0 = 500$

$Y = 7300$

$\varepsilon_{Y/G} = \frac{5000}{7300} = 0,685\%$

Nếu chi tiêu chính phủ tăng 1% thì Y tăng 0,685%.

Chương II:

MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ

Bài 1: Cho biết hàm số sản xuất ngắn hạn $Q = 100\sqrt[5]{L^3}$, L> 0 và giá sản phẩm là P= 5USD, giá thuê lao động là P_L =3USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để đạt lợi nhuận tối đa.

Giải:

$TR = 500L^{\frac{3}{5}}$

$TC = 3L$

$\pi = TR - TC = 500L^{\frac{3}{5}} - 3L$

để đạt lợi nhuận tối đa thì $\pi_{\max}$

$\rightarrow \pi' = 300L^{\frac{-2}{5}} - 3$; $\pi'=0$ $\rightarrow 300L^{\frac{-2}{5}} - 3 = 0 \rightarrow L^{\frac{-2}{5}} = \frac{1}{100} \rightarrow L = 100000$

Bài 2: **Cho biết hàm tổng chi phí: TC(Q) = Q^3-130Q^2 + 12Q; Q>0. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất.**

Giải:

$$AC_{min} = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 130Q + 12$$

Chi phí trung bình AC min $\Leftrightarrow \begin{cases} AC' = 0 \\ AC'' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2Q - 130 = 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow Q = 65$

Vậy mức sản lượng Q=65 chi phí trung bình nhỏ nhất AC_{min}=12687(đvtt)

Bài 3: **Cho biết hàm tổng chi phí TC(Q) = Q^3-8Q^2+ 57Q+ 2; Q>0 và hàm cầu Q= 90-2P. Hãy xác định mức sản lượng Q để đạt lợi nhuận tối đa.**

Giải:

TC(Q)= −8Q^2+Q^3+57Q+2; Q>0

Ta có: Q = 90 – 2P $\rightarrow$ P = 45 – $\frac{Q}{2}$

TR = P.Q = (45 – $\frac{Q}{2}$)Q = 45Q – $\frac{Q^2}{2}$

π = TR – TC = 45Q – $\frac{Q^2}{2}$ – $(Q^3 - 8Q^2 + 57 + 2)$

$$= 45Q - \frac{Q^2}{2} - Q^3 + 8Q^2 - 57Q - 2$$

$$= -Q^3 + \frac{15}{2}Q^2 - 12Q - 2$$

$$\pi' = -3Q^2 + 15Q - 12$$

Cho $\pi' = 0$, ta có : $Q = 4 \cup Q = 1$

$$\pi'' = -6Q + 15$$

Với $Q = 4 \rightarrow \pi'' = -9 < 0$

$$Q = 1 \rightarrow \pi'' = 9 > 0$$

Vậyπ đạt cực đại tại $Q = 4$, khi đó $\pi = 6$

Đơn giá $P = 43\,; TC = 166$

Vậy để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức

sản lượng $Q = 4$. Khi đó, lợi nhuận tương ứng sẽ là $\pi_{max} = 6$.

<u>Bài 4:</u> Cho biết hàm chi phí là TC(Q)= $4Q^3$ +$5Q^2$+500; Q>0 va hàm cầu Q= 11160- P. Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

<u>Giải:</u>

Hàm tổng chi phí là TC(Q) = $4Q^3 + 5Q^2 + 500$

Hàm cầu Q= 11160 – P → P = 11160 – Q

Hàm doanh thu là : TR (Q) = P*Q = (11160 – Q)*Q = 11160Q – Q^2

Lợi nhuận thu được là : π(Q) = TR(Q) – TC(Q) = 11160Q – Q^2 – ($4Q^3 + 5Q^2$ + 500)

π(Q) = – $4Q^3 - 6Q^2$ + 11160Q – 500

Xác định Q ≥ 0 để $\pi(Q)_{max}$

ta có π'(Q) = $-12Q^2 - 12Q + 11160$

π'(Q) = 0 ↔ $-12Q^2 - 12Q + 11160 = 0$ ↔ Q= 30(nhận) hay Q= −31(loại)

π''(Q) = −24Q – 12 → π''(Q=30) = −24*30 – 12= −732<0

Vậy lợi nhuận đạt cực đại tại Q=30, với π_{max} = 220900.

<u>Bài 5:</u> Một công ty có hàm cầu về sản phẩm và hàm tổng chi phí là:

P= 2750- $\frac{45}{8}Q$; TC= $\frac{Q^3}{30}$-15Q^3+2500Q (trong đó P là giá và Q là sản lượng)

a) Tính sản lượng và giá bán để tối đa hóa lợi nhuận? Tính và nêu ý nghĩa của hệ số co giãn của cầu sản phẩm theo giá và sản lượng tối ưu.

b) Tìm giá bán để tối ưu hóa sản lượng bán ra mà công ty không bị thua lỗ?

<u>Giải:</u>

a) TR= P.Q= (2750- $\frac{45}{8}Q$).Q =2750Q - $\frac{45}{8}Q^2$

π= TR- TC= 2750Q- $\frac{45}{8}Q^2 - \frac{Q^3}{30} + 15Q^2 - 2500Q = \frac{-Q^3}{30} + \frac{75}{8}Q^2 + 250Q$

π'(Q)=0⇔ $\frac{-1}{10}Q^2 + \frac{75}{4}Q + 250 = 0$⇔$Q_1$=200 hoặc Q_2=-25/2(loại)

π''(Q)=$\frac{-Q}{5} + \frac{75}{4}$

π''(200)= -21,25<0

Vậy π_{max} đạt cực đại tại Q=200⇨P= 1625

$\mathcal{E}_{Q/P}$=Q'(P)×$\frac{P}{Q} = \frac{-8}{45}.\frac{P}{\frac{4112}{9}-\frac{8P}{45}}$

Ɛ(P=1625)=-1,72

Khi sản lượng tăng 1% thì chi phí giảm 1,72%

<u>Bài 6:</u> Một công ty cạnh tranh hoàn hảo có thể sản xuất và cung ứng cho thị trường hai loại mặt hàng với hàm tổng chi phí kết hợp là TC= $2Q_1^2$+ $3Q_1Q_2$+$3Q^2_2$

a) Cho biết giá tại các mặt hàng là P_1=20, P_2=30. Hãy xác định mức sản lượng và lợi nhuận tối ưu.

b) Tại thời điểm tối ưu nếu tăng sản lượng mặt hàng loại 1 thêm 5%, tăng sản lượng mặt hàng loại 2 thêm 8% thì chi phí biến động như thế nào?

<u>Giải:</u>

a) TR= $20Q_1$+ $30Q_2$

π= TR- TC= $20Q_1+30Q_2-2Q_1^2-3Q_1Q_2-3Q_2^2$

$$\frac{\partial y}{\partial Q_1} = 20 - 4Q_1 - 3Q_2$$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 30 - 6Q_2 - 3Q_1$

$\begin{cases} 20 - 4Q_1 - 3Q_2 = 0 \\ 30 - 6Q_2 - 3Q_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 2 \\ Q_2 = 4 \end{cases}$

A=$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 Q_1} = -4$; B$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2}$= -3 ; C=$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 Q_2}$=-6

$\begin{cases} AC - B^2 = 15 > 0 \\ A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$ ⇨ π_{max} khi (Q_1; Q_2)= (2;4)

b) $\varepsilon_{TC/Q1}$= TC'(Q_1)×$\frac{Q_1}{TC} = 4Q_1 + 3Q_2 \frac{Q_1}{2Q_1^2+3Q_1Q_2+3Q_2^2}$= 20×$\frac{2}{80} = \frac{1}{2}$

Khi Q_1 tăng 1% thì chi phí tăng 0,5%

⇨ Khi Q_2 tăng 5% thì chi phí tăng 2,5%

$\varepsilon_{TC/Q2}$= TC'(Q_2)× $\frac{Q_2}{TC} = 3Q_1 + 6Q_2 \times \frac{Q_2}{2Q_1^2+3Q_1Q_2+3Q_2^2}$= 30×$\frac{4}{80} = 1,5$

Khi Q_2 tăng 1% thì chi phí tăng 1,5%

⇨ Khi Q_2 tăng 8% thì chi phí tăng 12%

<u>Bài 7:</u> Người ta ước lượng hàm sản xuất hằng ngày của một doanh nghiệp như sau: Q= 80$\sqrt{K}\sqrt[3]{L}$

a) Với K= 25, L=64. Hãy cho biết mức sản xuất hằng ngày của doanh nghiệp.

b) Bằng các đạo hàm riêng của Q, cho biết nếu doanh nghiệp

- **Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên mức K= 25 thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?**
- **Sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên mức L= 64 thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?**

c) **Nếu giá thuê một đơn vị tư bản K=12, và giá đơn vị lao động L=2,5 và doanh nghiệp sử dụng yếu tố đầu vào nêu trong câu a) thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm đơn vị K hay L.**

Giải :

a)

$Q = 80\sqrt{K}\sqrt[3]{L}$

Tại K=25; L=64 mức sản xuất hàng ngày của doanh nghiệp là

$Q = 80\sqrt{25}\sqrt[3]{64}$

$\Rightarrow Q = 1600$

b)Ta có đạo hàm riêng của Q theo L là:

$$\text{p}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{80\sqrt{K}}{3\sqrt[3]{L^2}}$$

Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên K=25, thì sản lượng thay đổi một lượng: $\Delta Q = \frac{80\sqrt{25}}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{25}{3}$ đơn vị.

Ta có đạo hàm riêng của Q theo K:

$$\text{p}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{80\sqrt[3]{L}}{2\sqrt{K}}$$

Sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên L=64 thì sản lượng thay đổi 1 lượng: $\Delta Q = \frac{80\sqrt[3]{64}}{2\sqrt{25}} = 32$ đơn vị.

c) Lập tỷ số:

$$\frac{\partial Q/\partial K}{P_K} = \frac{80\sqrt[3]{L}}{2.12\sqrt{K}} = \frac{10}{3}\frac{\sqrt[3]{L}}{\sqrt{K}} = \frac{10}{3}\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\partial Q/\partial L}{P_L} = \frac{80\sqrt{K}}{3.2{,}5\sqrt[3]{L^2}} = \frac{32}{3}\frac{\sqrt{K}}{\sqrt[3]{L^2}} = \frac{32}{3}\frac{\sqrt{25}}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{10}{3}$$

Ta thấy : $\frac{\partial Q/\partial L}{P_L} > \frac{\partial Q/\partial K}{P_K}$

Nên L tăng 1 đơn vị thì độ tăng Q theo K tăng 3,3 suy ra ta sẽ chọn L.

Bài 8: Cho hàm lợi ích TU= 3xy -2x^2-y^2; x,y >0

a) Tại x_0= 50, y_0=60, nếu x tăng thêm một đơn vị và y không đổi, hỏi lợi ích thay đổi như thế nào?.

b) Tính MU_y, tại x_0=50, y_0= 60, giải thích ý nghĩa.

Giải:

a) $\frac{\partial TU}{\partial x} = 3y - 4x$

$MU_x = \frac{\partial TU}{\partial x}(50;60) = 3.60 - 4.50 = -20$

Nếu x tăng thêm một đơn vị và y không đổi thì lợi ích sẽ giảm 20 đơn vị.

b) $MU_y = \frac{\partial TU}{\partial y} = 3x - 2y$

$MU_y(50;60) = 3.50 - 2.60 = 30$

Nếu y tăng thêm một đơn vị thì lợi ích sẽ tăng 30 đơn vị.

Bài 9: Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: $Q_1 = 1300 - P_1$; $Q_2 = 675 - 0{,}5P_2$

Và hàm chi phí kết hợp là TC= $Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải:

Điều kiện về mức sản lượng $Q_1, Q_2 > 0$

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho

$$\begin{cases} 1300 - P_1 = Q_1 \\ 675 - 0{,}5P_2 = Q_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 1300 - Q_1 \\ P_2 = 1350 - 2Q_2 \end{cases}$

Doanh thu TR = P.Q = $P_1Q_1 + P_2Q_2 = 1300Q_1 - Q_1^2 + 1350Q_2 - 2Q_2^2$

Lợi nhuận π = TR – TC = $1300Q_1 - Q_1^2 + 1350Q_2 - 2Q_2^2 - Q_1^2 - 3Q_1Q_2 - Q_2^2$

$\Leftrightarrow \pi = -2Q_1^2 - 3Q_2^2 + 1300Q_1 + 1350Q_2 - 3Q_1Q_2$.

Để đạt được lợi nhuận tối đa: π_{max}

Tọa độ điểm dừng tại

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 1300 - 3Q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -6Q_2 + 1350 - 3Q_1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 250 \\ Q_2 = 100 \end{cases}$

Xét tại điểm dừng, ta có

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_1}} = -4 = A; \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_2}} = -6 = C; \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -3 = B$

$$\begin{cases} A = -4 < 0 \\ \Delta = A.C - B^2 = (-4).(-6) - (-3)^2 = 15 > 0 \end{cases}$$

Vậy π_{max} tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng Q_1=250 và Q_2=100 ứng với mức giá P_1 = 1050, P_2 = 1150.

<u>Bài 10:</u> Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm như sau: $\boldsymbol{\pi = 160Q_1 - 3Q_1{}^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 120Q_2 - 18}$

Hãy tìm Q_1; Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải:</u>

$\pi = 160Q_1 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 120Q_2 - 18$

Ta có:

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 160 - 6Q_1 - 2Q_2$; $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -6$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -2Q_1 - 4Q_2 + 120$; $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -4$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1 Q_2} = -2$$

Lợi nhuận tối đa$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6Q_1 - 2Q_2 + 160 = 0 \\ -2Q_1 - 4Q_2 + 120 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 20 \\ Q_2 = 20 \end{cases}$

Đặt: A=$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2} = -6 <0$

$B = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1 Q_2} = -2$

C= $\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} = -4$

Ta có:

$AC-B^2=(-6)(-4)-(-2)^2= 20 > 0$ vậy doanh nghiệp đạt lợi nhuận cực đại tại

$Q_1 = 20; Q_2 = 20$

<u>Bài 11:</u> Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: $Q_1 = 25 - 0,5P_1$; $Q_2 = 30 - P_2$

Và hàm chi phí kết hợp là: $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải:</u>

Điều kiện về mức sản lượng $Q_1, Q_2 > 0$

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho

$25 - 0,5P_1 = Q_1$

$30 - P_2 = Q_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 50 - 2Q_1 \\ P_2 = 30 - Q_2 \end{cases}$

Doanh thu $TR = P.Q = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 50Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2$

Lợi nhuận $\pi = TR - TC = 50Q_1 - 2Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2 - 20$

$\Leftrightarrow \pi = -3Q_1^2 - 2Q_2^2 + 50Q_1 + 30Q_2 - 2Q_1Q_2 - 20.$

Để đạt được lợi nhuận tối đa: π_{max}

Tọa độ điểm dừng tại

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -6Q_1 + 50 - 2Q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -4Q_2 + 30 - 2Q_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 7 \\ Q_2 = 4 \end{cases}$$

Xét tại điểm dừng, ta có

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_1}} = -6 = A; \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_2}} = -4 = C; \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2 = B$$

$$\begin{cases} A = -6 < 0 \\ \Delta = A.C - B^2 = (-6).(-4) - (-2)^2 = 20 > 0 \end{cases}$$

Vậy π_{max} tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng $Q_1=7$ và $Q_2=4$ ứng với mức giá $P_1=36$, $P_2=26$.

<u>Bài 12:</u> Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là: $Q_1 = 50 - 0,5P_1$; $Q_2 = 76 - P_2$

Và hàm chi phí kết hợp là: $TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 55$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải:</u>

Điều kiện về mức sản lượng $Q_1, Q_2 > 0$

Để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho

$$\begin{cases} 50 - 0,5P_1 = Q_1 \\ 76 - P_2 = Q_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 100 - 2Q_1 \\ P_2 = 76 - Q_2 \end{cases}$$

Doanh thu $TR = P.Q = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 100Q_1 - 2Q_1^2 + 76Q_2 - Q_2^2$

Lợi nhuận $\pi = TR - TC = 100Q_1 - 2Q_1^2 + 76Q_2 - Q_2^2 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 - 55$

$\Leftrightarrow \pi = -5Q_1^2 - 3Q_2^2 + 100Q_1 + 76Q_2 - 2Q_1Q_2 - 55.$

Để đạt được lợi nhuận tối đa: π_{max}

Tọa độ điểm dừng tại

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -10Q_1 + 100 - 2Q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -6Q_2 + 76 - 2Q_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 8 \\ Q_2 = 10 \end{cases}$$

Xét tại điểm dừng, ta có

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_1}} = -10 = A; \frac{\partial^2 \pi}{\partial^2_{Q_2}} = -6 = C; \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2 = B$$

$$\begin{cases} A = -10 < 0 \\ \Delta = A.C - B^2 = (-10).(-6) - (-2)^2 = 56 > 0 \end{cases}$$

Vậy π_{max} tại tọa độ điểm dừng => doanh nghiệp đạt cực đại tại mức sản lượng $Q_1=8$ và $Q_2=10$ ứng với giá bán là $P_1=84$, $P_2=66$.

<u>Bài 13:</u> Cho hàm sản xuất của hãng $Q = 10K^{0,3}L^{0,4}$, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

<u>Giải:</u>

Ta có $Q = 10K^{0,3} L^{0,4}$ => hàm doanh thu $TR = P.Q = 40K^{0,3} L^{0,4}$

$w_K = 0,03$ $w_L = 2$ => hàm chi phí $TC = 0,03K + 2L$

Lợi nhuận: $\pi = TR - TC = 40K^{0,3} L^{0,4} - 0,03K - 2L$

$\frac{\partial \pi}{\partial L}(L,K) = 16K^{0.3} L^{-0.6} - 2$

$\frac{\partial \pi}{\partial K}(L,K) = 12K^{0.7} L^{0.4} - 0.03$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1^2}(L,K) = -9,6K^{0,3} L^{-1,6}$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2^2}(L,K) = -8,4K^{-1,7} L^{-0.4}$

$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}$(L,K) = 4,8$K^{-0,7}$ $L^{-0.6}$

Tìm điểm dừng : $\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial L}(L,K) = 16K^{0.3} L^{-0.6} - 2 = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial K}(L,K) = 12K^{0.7} L^{0.4} - 0.03 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16K^{0.3} L^{-0.6} - 2 = 0 \\ K = 400^{\frac{10}{7}} L^{\frac{4}{7}} \end{cases}$

Xét điểm dừng (L,K) ta có :

A = -9,6$K^{0,3}L^{-1,6}$ < 0; B = 4,8$K^{-0,7}L^{-0,6}$; C = -8,4$K^{-1,7}L^{0,4}$

Δ = AC – B^2 ≈ 1,4.10^{-14} > 0 nên π đạt cực đại tại điểm dừng (L,K) = (51200;2560000)

Vậy L = 51200, K = 2560000 thì hãng thu được lợi nhuận tối đa.

<u>Bài 14 :</u> Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm lợi nhuận của doanh nghiệp π = 15Q_1 + 12Q_2 – 3$Q_1Q_2^2$ - Q_1^3

Hãy tìm Q1, Q2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải :</u>

Ta có: π = 15Q_1 + 12Q_2 – 3$Q_1Q_2^2$ - Q_1^3

$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial Q_1}(Q_1,Q_2) = 15 - 3Q_2^2 - 3Q_1^2 \\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_2}(Q_1,Q_2) = 12 - 6Q_1Q_2 \end{cases}$

$A = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) = -6Q_1$

$B = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1 Q_2}(Q_1,Q_2) = -6Q_2$

$C = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) = -6Q_1$

Xác định điểm dừng : $\begin{cases} 15 - 3Q_2^2 - 3Q_1^2 = 0 \\ 12 - 6Q_1Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} Q_1 = 1 \\ Q_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} Q_1 = 2 \\ \end{cases} \end{array} \right.$

$Q_2 = 1$

$\rightarrow \pi$ có điểm dừng là $(Q_1,Q_2) = (2;1)$ hoặc $(Q_1,Q_2) = (1;2)$

Với $\begin{cases} Q_1 = 1 \\ Q_2 = 2 \end{cases}$

Ta có : $A = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) = -6$

$B = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2}(Q_1,Q_2) = -12$

$C = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) = -6$

$\begin{cases} A = -6 < 0 \\ \Delta = AC - B^2 = -108 < 0 \end{cases}$

⇨ hàm lợi nhuận không đạt cực đại.

Với $\begin{cases} Q_1 = 2 \\ Q_2 = 1 \end{cases}$

Ta có : : $A = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) = -12$

$B = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2}(Q_1,Q_2) = -6$

$C = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) = -12$

$\begin{cases} A = -12 < 0 \\ \Delta = AC - B^2 = 108 > 0 \end{cases}$

⇨ π đạt cực đại tại $(Q_1,Q_2) = (2,1)$

Vậy, để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa thì $(Q_1,Q_2) = (2,1)$.

Bài 15:

Doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất:

$$Q = -2K^2 + 3KL - 2L^2 + 30K + 20L \ ; \ (K,L > 0)$$

a) Hãy xác định mức sử dụng K,L để doanh nghiệp thu được mức sản lượng cực đại.

$Q'_K(K;L) = -4K + 3L + 30$

$Q'_L(K;L) = 3K - 6L + 20$

Gọi M(K;L) là điểm dừng được xác định.

$$\begin{cases} Q'_K(K;L) = 0 \\ Q'_L(K;L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4K + 3L + 30 = 0 \\ 3K - 6L + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 16 \\ L = 34/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M (16; 34/3)

Xét: $A = Q''_K(K;L) = -4$ $B = Q''_{K,L}(K;L) = 3$ $C = Q''_L(K;L) = -6$

$\Delta = AC - B^2 = 15 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow Q_{max} \text{ tại } M(16; 34/3)$$

Vậy tại K = 16, L = 34/3 thì doanh nghiệp thu được mức sản lượng cực đại.

b) Biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 4, giá thuê một đơn vị lao động bằng 22, giá sản phẩm bằng 2. Hãy xác định mức sử dụng K,L để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

$P_K = 4 \ ; \ P_L = 22 \ ; \ P_{tt} = 2$

Ta có :

$$LP_L + KP_K = 22L + 4K = TC$$

$$TR = P.Q = 2.(-2K^2 + 3KL - 2L^2 + 30K + 20L)$$

$$= -4K^2 + 6KL - 6L^2 + 60K + 40L$$

Để DN thu được lợi nhuận tối đa:

π_{max} = TR –TC = -4K^2 + 6KL – 6L^2 + 60K + 40L – 22L – 4K

π'_K (K,L) = -8K + 6L +56

π'_L (K,L) = 6K -12L + 18

Gọi H (K,L) là điểm dừng được xác định : $\begin{cases} \pi'_K\ (K,L) = 0 \\ \pi'_L\ (K,L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8K + 6L + 56 = 0 \\ 6K - 12L + 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} K = 13 \\ L = 8 \end{cases} \Rightarrow$ H (13,8)

Xét : A = π''_K (K,L) = -8 ; B = $\pi''_{K,L}$ (K,L) = 6 ; C = π''_L (K,L) = -12

Δ = AC –B^2 = 60 > 0 và $\begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Q_{max} tại H (13,8)

Bài 16 :

Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm.

Hàm cầu là: $Q_D = 300 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$.

Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải:

Với một mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có:

$Q_D = Q \Leftrightarrow 300 - P = Q \Leftrightarrow 300 - Q = P$

Mặt khác, ta có:

Doanh thu của xí nghiệp là: $TR = P.Q = (300 - Q).Q = 300Q - Q^2$

Doanh đạt lợi nhuận tối đa : π_{max} = TR – TC = –Q^3 + 18Q^2 – 33Q + 10

Với Q > 0 thì π'_Q = –3Q 2 + 36Q – 33

$\pi'_Q = 0 \Leftrightarrow$ –3Q 2 + 36Q – 33 = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} Q = 11 \text{ (chọn)} \\ Q = 1 \text{ (chọn)} \end{cases}$

Mặt khác :

π''_Q = –6Q + 36

π'' (11) = –30 < 0 => π_Q đạt cực đại (thỏa yêu cầu bài toán)

π'' (1) = 30 >0 => π_Q đạt cực tiểu (không thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy với Q = 11 thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

Bài 17: **Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là Q_D = 2640 – P và hàm tổng chi phí TC(Q) = Q2 + 1000Q + 100. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.**

Giải:

Với một mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp phải bán theo đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Ta có: $Q_D = Q \Leftrightarrow 2640 - P = Q \Leftrightarrow P = 2640 - Q$

Doanh thu của xí nghiệp là: $TR(Q) = PQ = -Q^2 + 2640Q$

Tiền thuế của xí nghiệp: $T(t) = Qt$

Lợi nhuận xí nghiệp thu được:

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) - Qt$

$= -Q^2 + 2640Q - Q^2 - 1000Q - 100 - Qt$

$= -2Q^2 + (1640 - t)Q - 100$

Xác định $Q > 0$ sao cho π đạt giá trị lớn nhất. Ta có:

π' (Q) = –4Q + 1640 – t

π' (Q) = 0 ⇔ –4Q + 1640 – t = 0 ⇔ Q = $-\frac{t}{4} + 410$

π'' (Q) = –4 < 0 ⟶ Cực đại

Vậy Q = $-\frac{t}{4}$ + 410 là mức sản lượng để π_{max}

Khi đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là :

$T(t) = tQ = -\frac{t^2}{4} + 410t$

Ta cần xác định t > 0 sao cho T(t) đạt cực đại.

Ta có : $T'(t) = -\frac{t}{2} + 410$

$T''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{t}{2} + 410 = 0 \Leftrightarrow t = 820$

$T''(t = 820) = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow$ Cực đại

Vậy với t = 820 thì tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là lớn nhất $T_{max} = 168100$

<u>Bài 18:</u> Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 1800 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 = 500$. Một công ty được độc quyền nhập khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bản trên thị trường quốc tế).

<u>Giải :</u>

Điểm cân bằng trong thị trường nội địa : $Q_S=Q_D \Leftrightarrow 1800 - P = P - 200 \Leftrightarrow P = 1000$ ($P_0 = 1000$)

Gọi t là thuế trên 1 đơn vị sản phẩm thỏa mãn điều kiện :

$t > 0$; $t + P_1 < P_0 \Rightarrow t + 500 < 1000$ (1)

Lượng hàng mà công ty nhập về là: $Q_D - Q_S = 1800 - P - P + 200 = 2000 - 2P$

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

$\pi(P) = (P - P_1 - t)(Q_D - Q_S) = (P - 500 - t)(2000 - 2P)$

$= 2000P - 2P^2 - 1000000 + 1000P - 2000t + 2Pt$

$= -2P^2 + (3000 + 2t)P - 2000t - 1000000$

π' (P) = –4P +3000+ 2t

π' (P) = 0 ⇔ –4P +3000+ 2t =0

⇔ P = $\frac{3000+2t}{4}$ = 750 + $\frac{t}{2}$

π'' (P) = –4 < 0 => π'' (750 + $\frac{t}{2}$) = –4

Tiền thuế công ty phải nộp:

T(t) = t(Q_D -Q_S) = t(2000 -2P) = t(2000 -2(750 + $\frac{t}{2}$))= 500t –t^2

T'(t) = 500-2t

T'(t) =0 ⇔ 500 -2t =0 ⇔ t =250 (thỏa mãn điều kiện (1))

T''(t) = –2 <0 ⇒ Vậy t = 250 là giá cần tìm

<u>Bài 19 :</u> Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là Q_S = P – 20 và Q_D = 400 – P (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa tính thuế xuất khẩu) là P_1 = 310. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bản trên thị trường quốc tế).

<u>Giải :</u>

Điểm cân bằng trong thị trường nội địa : Q_S=Q_D ⇔ P -20 = 400 –P ⇔ P =210 (P_0 =210).

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thỏa điều kiện

t > 0 ; 310 –t > 210 ⇒ t < 100 (*)

Khi đó lượng hàng mà công ty xuất khẩu là : Q_S – Q_D = P -20 -400 +P = 2P -420

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

π(P) = (P_1 – P –t)(Q_S – Q_D) = (310 –P –t)(2P -420) = 620P -130200 -2P^2 +420P -2Pt+420t

= -2P^2 + (1040 – 2t)P + 420t -130200

π'(P) = – 4P + 1040 – 2t

π' (P) = 0 ⇔ P = $\frac{1040-2t}{4}$ = 260 – 0.5t

π'' (P) = –4 < 0 => π'' (260 – $\frac{t}{2}$) = –4

Tiền thuế mà công ty cần phải nộp:

T(t) = t(Qs – QD) = t(2P -420) = t(2(260 -0.5t) -420) = 100t – t^2

T'(t) = 100 -2t

T'(t) =0 ⇔ 100 -2t =0 ⇔ t= 50 (thỏa mãn điều kiện (*))

T''(t) =-2 <0 ⇒ Vậy t = 50 là giá cần tìm

<u>Bài 20 :</u> Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá hai loại sản phẩm trên thị trường là P1 = 60 và P2 = 75. Hàm tổng chi phí là : TC = $\boldsymbol{Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2}$. Hãy xác định các mức sản lượng Q1 và Q2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải :</u>

Tổng doanh thu: TR = $P_1Q_1 + P_2Q_2 = 60Q_1 + 75Q_2$

Hàm lợi nhuận: $\pi = 60Q_1 + 75Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$

Ta có : $\frac{\partial\pi}{Q_1}$ (Q_1,Q_2) = 60 – $2Q_1 - Q_2$ và $\frac{\partial\pi}{Q_2}$ (Q_1,Q_2) = 75 – $Q_1 - 2Q_2$

$A = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}$ (Q_1,Q_2) = –2

$B = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1Q_2}$ (Q_1,Q_2) = –1

$C = \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}$ (Q_1,Q_2) = –2

Xác định điểm dừng :

$$\begin{cases} 60 - 2Q_1 - Q_2 = 0 \\ 75 - Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 15 \\ Q_2 = 30 \end{cases} \longrightarrow \pi \text{ có điểm dừng là } (Q_1, Q_2) = (15,30)$$

Ta có : Δ = AC – B^2= 3 > 0 nên π max tại Q_1=15 và Q_2=30

<u>Bài 21:</u> Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là :

$Q_{D_1} = 40 - 2P_1$ và $Q_{D_2} = 15 + P_1 - P_2$.

Với hàm tổng chi phí là : TC = $Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

<u>Giải :</u>

$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2 \Leftrightarrow P_1 = 55 - Q_2 - Q_1$

$Q_2 = 15 + P_1 - P_2 \Leftrightarrow P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2$

Hàm doanh thu là TR = $P_1Q_1 + P_2Q_2 = 55Q_1 + 70Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2$

Lợi nhuận là π = TR – TC = $55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_1^2 - 3Q_2^2 - 3Q_1Q_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial Q_1}(Q_1,Q_2) = 55 - 3Q_2 - 4Q_1 \\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_2}(Q_1,Q_2) = 70 - 6Q_2 - 3Q_1 \\ \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) = -4 \\ \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) = -6 \\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}(Q_1,Q_2) = -3 \end{cases}$$

Tìm điểm dừng : $\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial Q_1}(Q_1,Q_2) = 55 - 3Q_2 - 4Q_1 = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_2}(Q_1,Q_2) = 70 - 6Q_2 - 3Q_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 8 \\ Q_2 = \frac{23}{3} \end{cases}$

- ⇨ Điểm dừng $(Q_1,Q_2) = (8 ; \frac{23}{3})$

Xét điểm dừng $(Q_1,Q_2) = (8 ; \frac{23}{3})$,ta có :

A = -4 <0; B = -3; C = -6

$\Delta = AC - B^2 = 15 > 0$ nên π đạt cực đại tại $(Q_1,Q_2) = (8; \frac{23}{3})$

Vậy $Q_1 = 8$; $Q_2 = \frac{23}{3}$ thì doanh nghiệp đạt lợi nhuận cực đại.

<u>Bài 22 :</u> Một người muốn dung số tiền 178000000 đồng để mua hai mặt hàng có đơn

giá P_1 = 400000 đồng và P_2 = 600000 đồng. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $TU = (x_1 + 20).(x_2 + 10)$ (x_1, x_2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai loại mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

<u>Giải :</u>

x_1, x_2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng

$TU = (x_1 + 20).(x_2 + 10)$

Điều kiện: $M = Px_1 + Px_2$

$\Rightarrow 178000000 = 400000x_1 + 600000x_2 \Leftrightarrow 890 = 2x_1 + 3x_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 - 890 = 0$

Đặt: $g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 890$

Thiết lập hàm Lagrange: $L(x_1, x_2, \lambda) = TU(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$

$\Rightarrow L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + 20)(x_2 + 10) + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 890)$

Ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 10 + 2\lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 20 + 3\lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 - 890 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} = 1 \end{cases}$$

Ta tìm tọa độ điểm dừng M của hàm Larange là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 10 + 2\lambda = 0 \\ x_1 + 20 + 3\lambda = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 890 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow M(220;150;-80)$$

Vi phân toàn phần cấp 2

d^2L (x_1,x_2,λ) = $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2$

=> d^2L(M) = $0dx_1^2 + 2dx_1dx_2 + 0dx_2^2 = 2dx_1dx_2$ (*)

dx_1, dx_2 thỏa $\frac{\partial g}{\partial x_1}(M)dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}(M)dx_2$ = 0

⇔ $2dx_1 + 3dx_2 = 0$⇔ $dx_1 = -\frac{3}{2}dx_2$,thế (*),ta được:

d^2L(M) = $2dx_1dx_2 = -3dx_2 < 0$ => TU (x_1, x_2) đạt cực đại tại M

Vậy TU_{max} = 38400 ⇔ $\begin{cases} x_1 = 220 \\ x_2 = 150 \end{cases}$

<u>Bài 23 :</u> Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t

Sản lượng	**Sản phẩm trung gian**			**SPCC**
300	**60**	**24**	**80**	**136**
240	**30**	**48**	**40**	**122**
400	**90**	**24**	**120**	**166**
Lao động	**30**	**36**	**40**	**Năm (t+1)**

a) Hãy xác định các hệ số kỹ thuật và hệ số sử dụng lao động năm t.

Gọi α_{ij} là các hệ số kỹ thuật

$\alpha_{11} = \frac{60}{300} = 0.2$ $\alpha_{12} = \frac{24}{240} = 0.1$ $\alpha_{13} = \frac{80}{400} = 0.2$

$\alpha_{21} = \frac{30}{300} = 0.1$ $\alpha_{22} = \frac{48}{240} = 0.2$ $\alpha_{23} = \frac{40}{400} = 0.1$

$\alpha_{31} = \frac{90}{300} = 0.3$ $\alpha_{32} = \frac{24}{240} = 0.1$ $\alpha_{33} = \frac{120}{400} = 0.3$

Nên ma trận $\alpha = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

Gọi $\beta_{01} = \frac{30}{300} = 0.1$ $\beta_{02} = \frac{36}{240} = 0.15$ $\beta_{03} = \frac{40}{400} = 0.1$

Nên ma trận β = (0.1 0.15 0.1)

b) Biết q(t+1)=(150 ; 140 ; 180) và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với

năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

Ta có :$(I - \alpha\,(t+1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{55}{38} & \frac{9}{38} & \frac{17}{28} \\ \frac{5}{19} & \frac{25}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{25}{38} & \frac{11}{38} & \frac{63}{38} \end{bmatrix}$

Nên Q(t+1) = $(I - \alpha(t+1)^{-1}.q(t+1) = \begin{bmatrix} \frac{55}{38} & \frac{9}{38} & \frac{17}{28} \\ \frac{5}{19} & \frac{25}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{25}{38} & \frac{11}{38} & \frac{63}{38} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 150 \\ 140 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330.8 \\ 271.05 \\ 437.63 \end{bmatrix}$

$q_{11} = \alpha_{11}.Q_1$ = 0.2 x 330.8 = 66.16 $q_{12} = \alpha_{12}.Q_2$ = 0.1 x 271.05 = 27.1

$q_{21} = \alpha_{21}.Q_1$ = 0.1 x 330.8 = 33.08 $q_{22} = \alpha_{22}.Q_2$= 0.2 x 271.05 = 54.21

$q_{31} = \alpha_{31}.Q_1$ = 0.3 x 330.8 = 99.24 $q_{32} = \alpha_{32}.Q_2$ = 0.1 x 271.05 = 27.1

$q_{13} = \alpha_{13}.Q_3$ = 0.2 x 437.63 = 87.5 $q_{23} = \alpha_{23}.Q_3$ = 0.1 x 437.63 = 43.76

$q_{33} = \alpha_{33}.Q_3$ = 0.3 x 437.63 = 131.29

$q_{01} = \beta_{01}.Q_1$ = 0.1 x 330.8 = 33.08 $q_{02} = \beta_{02}.Q_2$ = 0.15 x 271.05 = 40.6

$q_{03} = \beta_{03}.Q_3$ = 0.1 x 437.63 = 43.76

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
330.8	66.16	27.1	87.5	150
271.05	33.08	54.21	43.76	140
437.63	99.24	27.1	131.29	180
Lao động	87.5	43.76	40.6	Năm (t+2)

c) Xác định vectơ giá trị sản phẩm được sản xuất ra. Biết giá trị gia tăng của các ngành là w^T = (0,05 ; 0,1 ; 0,15).

Gọi P là vector giá trị sản phẩm được sản xuất ra :

Với $w^T = (0.05\ \ 0.1\ \ 0.15)$

⇨ $P^T = w^T.(I - \alpha(t+1))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{55}{38} & \frac{9}{38} & \frac{17}{28} \\ \frac{5}{19} & \frac{25}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{25}{38} & \frac{11}{38} & \frac{63}{38} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.1 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.163 \\ 0.184 \\ 0.31 \end{bmatrix}$

Vậy P = (0.163 ; 0.184 ; 0.31)

<u>Bài 24 :</u> Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t

Sản lượng	**Sản phẩm trung gian**			**SPCC**
210	**42**	**36**	**66**	
	0	**36**	**22**	**122**
220		**18**	**22**	**96**
Lao động	**42**	**18**	**66**	**Năm (t+1)**

a) Hãy tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.

Các giá trị còn thiếu:

$q_1 = Q_1 - (q_{11} + q_{12} + q_{13}) = 210 - (12 + 36 + 66) = 66$

$Q_2 = q_{21} + q_{22} + q_{23} + q_2 = 0 + 36 + 22 + 96 = 180$

$q_{31} = Q_3 - (q_{32} + q_{33} + q_3) = 220 - (18 + 22 + 96) = 84$

b) Hãy xác định ma trận hệ số kỹ thuật và vecto sử dụng lao động năm t.

Ta có :

$\alpha_{ij}(t) = \frac{q_{ij}(t)}{Q_j(t)}$

$\alpha_{11} = \frac{42}{210} = 0.2$ $\alpha_{12} = \frac{36}{180} = 0.2$ $\alpha_{13} = \frac{66}{220} = 0.3$

$\alpha_{21} = \frac{0}{210} = 0$ $\alpha_{22} = \frac{36}{180} = 0.2$ $\alpha_{23} = \frac{22}{220} = 0.1$

$\alpha_{31} = \frac{84}{210} = 0.4$ $\alpha_{32} = \frac{18}{180} = 0.1$ $\alpha_{33} = \frac{22}{220} = 0.1$

Ma trận hệ số kỹ thuật :

$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

Ta có :

$\beta_{0j}(t) = \frac{q_{0j}(t)}{Q_j(t)}$

$\beta_{01} = \frac{42}{210} = 0.2$ $\beta_{02} = \frac{18}{180} = 0.1$ $\beta_{03} = \frac{66}{220} = 0.3$

Vector sử dụng lao động :

$\beta(t) = (0.2; 0.1; 0.3)$

c) **Nếu biết α_{31}(t+1) = $\frac{1}{2}\alpha_{31}$(t) còn các hệ số khác không đổi và q(t+1) = (70, 130, 100). Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).**

Ta có

$\alpha_{31}(t+1) = \frac{1}{2}\alpha_{31}(t) = \frac{1}{2}.0{,}4 = 0{,}2$ với các hệ số khác không đổi

❁ $Q(t+1) = (I - \alpha(t+1))^{-1}q(t+1)$

Ta có : $\big(I - \alpha(t+1)\big) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$;với det $(I - \alpha(t+1))$ = 0,516

❁ $(I - \alpha(t+1))^{-1} = \frac{1}{\det(I-\alpha(t+1))}B^T = \frac{1}{0{,}516}\begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}21 & 0{,}26 \\ 0{,}02 & 0{,}66 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}64 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{355}{258} & \frac{35}{86} & \frac{65}{129} \\ \frac{5}{129} & \frac{55}{43} & \frac{20}{129} \\ \frac{40}{129} & \frac{10}{43} & \frac{160}{129} \end{pmatrix}$

Vậy : Q(t+1) = $\begin{pmatrix} \frac{355}{258} & \frac{35}{86} & \frac{65}{129} \\ \frac{5}{129} & \frac{55}{43} & \frac{20}{129} \\ \frac{40}{129} & \frac{10}{43} & \frac{160}{129} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 \\ 130 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25750}{129} \\ \frac{23800}{129} \\ 175{,}969 \end{pmatrix}$

❁ Ta có : $q_{ij}(t+1) = \alpha_{ij}(t+1)Q_j(t+1)$

$q_{11} = \alpha_{11}.Q_1 = 0.2 \text{ x } \frac{25750}{129} = \frac{5150}{129}$ $q_{12} = \alpha_{12}.Q_2 = 0.2 \text{ x } \frac{23800}{129} = \frac{4760}{129}$

$q_{21} = \alpha_{21}.Q_1 = 0$ $q_{22} = \alpha_{22}.Q_2 = 0.2 \text{ x } \frac{23800}{129} = \frac{4760}{129}$

$q_{31} = \alpha_{31}.Q_1 = 0.2 \text{ x } \frac{25750}{129} = \frac{5150}{129}$ $q_{32} = \alpha_{32}.Q_2 = 0.1 \text{ x } \frac{23800}{129} = \frac{2380}{129}$

$q_{13} = \alpha_{13}.Q_3 = 0.3\text{x}175{,}969 = 52{,}7907$ $q_{23} = \alpha_{23}.Q_3 = 0.1 \text{ x } 175{,}969 = 17{,}5969$

$q_{33} = \alpha_{33}.Q_3 = 0.1 \text{ x } 175{,}969 = 17{,}5969$

- $q_{0j}(t+1) = \beta_{0j}(t+1)Q_j(t+1)$

$q_{01} = \beta_{01}.Q_1 = 0.2 \text{ x } \frac{25750}{129} = \frac{5150}{129}$ $q_{02} = \beta_{02}.Q_2 = 0.1 \text{ x } \frac{23800}{129} = \frac{2380}{129}$

$q_{03} = \beta_{03}.Q_3 = 0.3 \text{ x } 175{,}969 = 52{,}7907$

- Bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật (t+1)

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
$\frac{25750}{129}$	$\frac{5150}{129}$	$\frac{4760}{129}$	52,7907	70
$\frac{23800}{129}$	0	$\frac{4760}{129}$	17,5969	130
175,969	$\frac{5150}{129}$	$\frac{2380}{129}$	17,5969	100
Lao động	$\frac{5150}{129}$	$\frac{2380}{129}$	52,7907	

<u>Bài 25 :</u> Cho ma trận hệ số kỹ thuật của năm t của 3 ngành dạng hiện vật :

$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ và vectơ sử dụng lao động năm t : $\beta(t) = (0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}15)$

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở cùng cột 3 của ma trận này.

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t

$$\theta = (I - \alpha(t))^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\det (I - \alpha(t))^{-1} = \frac{3}{5}$

$$\theta = (I - \alpha(t))^{-1} = \frac{1}{\det(I - \alpha(t))} . B^T = \frac{5}{3} . \begin{matrix} 0{,}72 & 0{,}18 & 0{,}06 \\ 0{,}24 & 0{,}81 & 0{,}27 \\ 0{,}24 & 0{,}31 & 0{,}77 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 1{,}35 & 0{,}45 \\ 0{,}4 & \frac{31}{60} & \frac{77}{60} \end{pmatrix}$$

Ý nghĩa kinh tế các phần tử ở cùng cột 3 của ma trận là :

Với $\theta_{13} = 0{,}1$ $\theta_{23} = 0{,}45$ $\theta_{33} = \frac{77}{60}$ có nghĩa : Để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm cuối cùng của ngành 3 thì ngành 1,2,3 cần cung cấp cho ngành 3 lượng sản phẩm lần lượt là : 0,1 ;0,45 ; $\frac{77}{60}$

b) Biết q(t+1) = (60, 50, 70) và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành của năm (t+1).

q(t+1) = (60 50 70)

$\alpha(t) = \alpha(t+1) \rightarrow (I - \alpha(t+1))^{-1} = (I - \alpha(t+1))$

Q(t+1) = $(I - \alpha(t+1))^{-1} . q(t+1) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 1{,}35 & 0{,}45 \\ 0{,}4 & \frac{31}{60} & \frac{77}{60} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 123 \\ \frac{419}{23} \end{pmatrix}$

Ta có bảng cân đối liên ngành năm t+1

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
94	9,4	24,6	0	60
123	18,8	12,3	42,9	50
139,6	18,8	36,9	$\frac{419}{30}$	70
Lao động	9,4	24,6	20,95	Năm (t+1)

c) Xác định vecto giá trị sản phẩm các ngành, biết phần giá trị gia tăng của các ngành là w^T = (0,05; 0,1; 0,15).

Vectơ giá trị sản phẩm các ngành :

$$P^T = w^T.(I - \alpha(t))^{-1} = (0{,}05\quad 0{,}1\quad 0{,}15).\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 1{,}35 & 0{,}45 \\ 0{,}4 & \frac{31}{60} & \frac{77}{60} \end{pmatrix}$$

$$= (0{,}16\quad 0{,}2275\quad 0{,}2425)$$

<u>Bài 26 :</u> Cho bảng cân đối liên ngành năm t của 3 ngành :

Ngành	**GTSX**	**x_{ij}**			**NCCC**
		1	**2**	**3**	
1	**2500**	**250**	**x_{12}**	**400**	**1490**
2	**1800**	**500**	**180**	**400**	**X_2**
3	**2000**	**750**	**360**	**200**	**690**
	GTGT	**Z_1**	**180**	**400**	**V**

a) **Tìm các hệ số còn lại trên bảng.**

$Z_1 = 1000$; $x_{12} = 360$

b) **Tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp năm t, giải thích ý nghĩa hệ số a_{32}.**

$a_{11} = \frac{x_{11}}{Y_1} = \frac{250}{2500} = 0{,}1$ $\quad a_{12} = \frac{x_{12}}{Y_2} = \frac{360}{1800} = 0{,}2$ $\quad a_{13} = \frac{x_{13}}{Y_3} = \frac{400}{2000} = 0{,}2$

$a_{21} = \frac{x_{21}}{Y_1} = \frac{500}{2500} = 0{,}2$ $\quad a_{22} = \frac{x_{22}}{Y_2} = \frac{180}{1800} = 0{,}1$ $\quad a_{23} = \frac{x_{23}}{Y_3} = \frac{400}{2000} = 0{,}2$

$a_{31} = \frac{x_{31}}{Y_1} = \frac{750}{2500} = 0{,}3$ $\quad a_{32} = \frac{x_{32}}{Y_2} = \frac{360}{1800} = 0{,}2$ $\quad a_{33} = \frac{x_{33}}{Y_3} = \frac{200}{2000} = 0{,}1$

Ma trận hệ số chi phí trực tiếp năm t : $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

a_{32} : cho biết để có 1 đơn vị sản phẩm ngành 2 thì ngành 3 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này 1 lượng sản phẩm là 0,2 đơn vị.

c) **Nếu năm (t+1) nhu cầu về SPCC của các ngành là : (540 ;250 ;300) đơn vị tỷ VNĐ. Lập bảng cân đối liên ngành cho năm (t+1), biết A(t+1)=A(t).**

Vectơ hệ số chi phí đầu vào :

$b_1 = \frac{Z_1}{Y_1} = \frac{1000}{2500} = 0{,}4$ $\quad b_2 = \frac{Z_2}{Y_2} = \frac{900}{1800} = 0{,}5$ $\quad b_3 = \frac{Z_3}{Y_3} = \frac{1000}{2000} = 0{,}5$

Ta có : A(t+1) = A(t)

$$I - A(t+1) = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\theta = (I - A(t+1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{70}{53} & \frac{20}{53} & \frac{20}{53} \\ \frac{240}{583} & \frac{750}{583} & \frac{20}{53} \\ \frac{310}{583} & \frac{240}{583} & \frac{70}{53} \end{pmatrix}$$

$$Y(t+1) = \theta.Y(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{70}{53} & \frac{20}{53} & \frac{20}{53} \\ \frac{240}{583} & \frac{750}{583} & \frac{20}{53} \\ \frac{310}{583} & \frac{240}{583} & \frac{70}{53} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 540 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 920{,}75 \\ 657{,}12 \\ 786{,}28 \end{pmatrix}$$

$x_{11} = a_{11}Y_1$ = 0,1.920,75 = 92.075

$x_{12} = a_{12}Y_2$ = 0,2.657,12 = 131.424

$x_{13} = a_{13}Y_3$ = 0,2.786,28 = 157,256

$x_{31} = a_{31}Y_1$ = 0,3. 920,75 = 276,225

$x_{32} = a_{32}Y_2$ = 0,2.657,12 = 131.424

$x_{33} = a_{33}Y_3$ = 0,1.786,28 = 78,628

$x_{21} = a_{21}Y_1$ = 0,2.920,75 = 184,15

$x_{22} = a_{22}Y_2$ = 0,1.657,12 = 65,712

$x_{23} = a_{23}Y_3$ = 0,2.786,28 = 157,26

$Z_1 = b_1Y_1$ = 0,4.920,75 = 368,3

$Z_2 = b_2Y_2$ = 0,5.657,12 = 328,56

$Z_3 = b_3Y_3$ = 0,5.786,28 = 393,14

Bảng cân đối liên ngành năm (t+1)

Ngành	GTSX	x_{ij}			NCCC
		1	2	3	
1	920,755	92,075	131,424	157,256	540
2	657,118	184,15	65,712	157,256	250
3	486,277	276,225	131,424	78,628	300
	GTGT	368,3	328,56	393,14	

<u>Bài 27 :</u> Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là :

$$\mathbf{A(t)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0,3} \\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,1} & \mathbf{0,1} \\ \mathbf{0,2} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,1} \end{pmatrix}$$

Hệ số chi phí tương ứng là : (0,2 ; 0,2 ; 0,1), giá trị sản lượng của các ngành ở năm t là :

$$\mathbf{Y(t)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1450} \\ \mathbf{1990} \\ \mathbf{1500} \end{pmatrix}$$

a) Lập bảng cân đối liên ngành năm t.

$X_{11} = 0{,}2 \,.\, 1450 = 290$

$X_{12} = 0 \,.\, 1990 = 0$

$X_{13} = 0{,}3 \,.\, 1500 = 450$

$X_{21} = 0{,}1 \,.\, 1450 = 145$

$X_{22} = 0{,}1 \,.\, 1990 = 199$

$X_{23} = 0{,}1 \,.\, 1500 = 150$

$X_{31} = 0{,}2 \,.\, 1450 = 290$

$X_{32} = 0{,}2 \,.\, 1990 = 398$

$X_{33} = 0{,}1 \,.\, 1500 = 150$

Bảng cân đối liên ngành năm t:

Ngành	GTSX	X_{ij}			NCCC
		1	2	3	
1	1450	290	0	450	710
2	1990	145	199	150	1496
3	1500	290	398	150	662
	GTGT	725	1393	750	V = 2868
GTSX	4940	1450	1990	1500	

b) Lập ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t.

Ta có: $I - A(t) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

➔ Ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t :

$$C = (\,I - A(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{395}{286} & \frac{15}{143} & \frac{135}{286} \\ \frac{5}{26} & \frac{15}{13} & \frac{5}{26} \\ \frac{50}{143} & \frac{40}{143} & \frac{180}{143} \end{pmatrix}$$

c) Biết X(t+1)=(800, 1500, 700) và các hệ số không đổi, lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

Do các hệ số không đổi nên

$$A(t+1) = A(t) = \begin{matrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{matrix}$$

Mà $X(t+1) = \begin{pmatrix} 800 \\ 1500 \\ 700 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Y(t+1) = \left(I + A(T+1)\right)^{-1}.X(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{395}{286} & \frac{15}{143} & \frac{135}{286} \\ \frac{5}{26} & \frac{15}{13} & \frac{5}{26} \\ \frac{50}{143} & \frac{40}{143} & \frac{180}{143} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 800 \\ 1500 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1593 \\ 2019 \\ 1580 \end{pmatrix}$$

$X_{11} = 0{,}2 \cdot 1593 = 319$
$X_{12} = 0 \cdot 2019 = 0$
$X_{13} = 0{,}3 \cdot 1580 = 474$
$X_{21} = 0{,}1 \cdot 1593 = 159$
$X_{22} = 0{,}1 \cdot 2019 = 202$
$X_{23} = 0{,}1 \cdot 1580 = 158$
$X_{31} = 0{,}2 \cdot 1593 = 319$
$X_{32} = 0{,}2 \cdot 2019 = 404$
$X_{33} = 0{,}1 \cdot 1580 = 158$

Bảng cân đối liên ngành năm t+1

Ngành	GTSX	X_{ij}			NCCC
		1	2	3	
1	1593	319	0	474	800
2	2019	159	202	158	1500
3	1580	319	202	158	700
	GTGT	796	1615	790	V = 3000
GTSX	5193	1593	2019	1580	

<u>Bài 28:</u> Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,3} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,3} \\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,3} & \mathbf{0,2} \\ \mathbf{0,3} & \mathbf{0,3} & \mathbf{0,2} \end{pmatrix}$$

Hệ số chi phí lương là : (0,2 ; 0,1 ; 0,2)

Giá trị sản lượng của các ngành ở năm t là :

$$\mathbf{Y(t)} = \begin{pmatrix} \mathbf{450} \\ \mathbf{600} \\ \mathbf{560} \end{pmatrix}$$

a) Lập bảng cân đối liên ngành năm t :

$X_{11} = 0,3 . 1450 = 135$
$X_{12} = 0,2 . 600 = 120$
$X_{13} = 0,3 . 560 = 168$
$X_{21} = 0,1 . 450 = 45$
$X_{22} = 0,3 . 600 = 180$
$X_{23} = 0,2 . 560 = 112$
$X_{31} = 0,3 . 450 = 135$
$X_{32} = 0,3 . 600 = 180$
$X_{33} = 0,2 . 560 = 112$

Bảng cân đối liên ngành năm t:

Ngành	GTSX	X_{ij}			NCCC
		1	2	3	
1	450	135	120	168	27
2	600	45	180	112	263
3	560	135	180	112	133
	GTGT	135	120	168	V = 423
GTSX	1610	450	600	560	

b) Lập ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.

$$I - A(t) = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ -0,3 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{C} = (I - A(t))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,56 & 1,88 & 0,68 \\ 0,96 & 1,08 & 1,88 \end{pmatrix}$$

Ý nghĩa: $c_{23} = 0,68$ là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,68.

c) Năm (t+1) nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là (180; 150; 100) (tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm (t+1) và năm t như nhau.

Ta có : Các hệ số chi phí năm (t+1) và năm t như nhau nên

$$A(t+1) = A(t) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad x(t+1) = \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$Y(t+1) = \left(I - A(t+1)\right)^{-1}.x(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{14}{25} & \frac{47}{25} & \frac{17}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{27}{25} & \frac{47}{25} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 451 \\ 523 \end{pmatrix}$$

Vậy giá trị sản lượng của các ngành ở năm (t+1) là $Y(t+1) = \begin{pmatrix} 610 \\ 451 \\ 523 \end{pmatrix}$

<u>Bài 29 :</u> Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t

Giá trị Tổng sản lượng	**Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian**			**Giá trị sản phẩm cuối cùng**
600	**120**	**90**	**56**	
450	**60**	**45**	**112**	
560	**90**	**22,5**	**168**	
Nhập khẩu	**30**	**45**	**84**	
Lương	**60**	**67,5**	**28**	
Khấu hao	**60**	**45**	**28**	
Thuế	**60**	**45**	**28**	
Lợi nhuận	**120**	**90**	**56**	

a) **Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.**

$x_1 = X_1 - \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 600 - (120+90+56) = 334$

$x_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 450 - (60+45+112) = 233$

$x_3 = X_3 - \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 560 - (90+22,5+168) = 279,5$

b) **Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử năm ở dòng 2 cột 3.**

$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{120}{600} = 0,2$; $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{90}{450} = 0,2$; $a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{56}{560} = 0,1$;

$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{60}{600} = 0,1$; $a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{45}{450} = 0,1$; $a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{112}{560} = 0,2$;

$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{90}{600} = 0,15$; $a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{22,5}{450} = 0,05$; $a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{168}{560} = 0,3$.

$\Rightarrow$ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,15 & 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

$$C = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,9 & -0,2 \\ -0,15 & -0,05 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{310}{231} & \frac{145}{462} & \frac{65}{231} \\ \frac{50}{231} & \frac{545}{462} & \frac{85}{231} \\ \frac{10}{33} & \frac{5}{33} & \frac{50}{33} \end{pmatrix}$$

Ý nghĩa phần tử $c_{23} = \frac{85}{231} \approx 0,3679$ là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,3679.

c) Tìm ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.

$b_{11} = \frac{y_{11}}{X_1} = \frac{30}{600} = 0,05$; $b_{12} = \frac{y_{12}}{X_2} = \frac{45}{450} = 0,1$; $b_{13} = \frac{y_{13}}{X_3} = \frac{84}{560} = 0,15$;

$b_{21} = \frac{y_{21}}{X_1} = \frac{60}{600} = 0,1$; $b_{22} = \frac{y_{22}}{X_2} = \frac{67,5}{450} = 0,15$; $b_{23} = \frac{y_{23}}{X_3} = \frac{28}{560} = 0,05$;

$b_{31} = \frac{y_{31}}{X_1} = \frac{60}{600} = 0,1$; $b_{32} = \frac{y_{32}}{X_2} = \frac{45}{450} = 0,1$; $b_{33} = \frac{y_{33}}{X_3} = \frac{28}{560} = 0,05$;

$b_{41} = \frac{y_{11}}{X_1} = \frac{60}{600} = 0,1$; $b_{42} = \frac{y_{42}}{X_2} = \frac{45}{450} = 0,1$; $b_{43} = \frac{y_{43}}{X_3} = \frac{28}{560} = 0,05$;

$b_{51} = \frac{y_{51}}{X_1} = \frac{120}{600} = 0,2$; $b_{52} = \frac{y_{52}}{X_2} = \frac{90}{450} = 0,2$; $b_{53} = \frac{y_{53}}{X_3} = \frac{56}{560} = 0,1$;

⇒ ma trận các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t là:

$$B = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,15 \\ 0,1 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,05 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Ý nghĩa kinh tế của phần tử $b_{13} = 0,05$ là: Để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành 3 thì ngành này phải sử dụng trực tiếp 0,05 đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ 1.

d) Giả sử các hệ số năm (t+1) không đổi so với năm t, và vectơ sản phẩm cuối cùng năm (t+1) là x(t+1)=($\mathbf{500 \quad 100 \quad 400}$). Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

Ta có A(t+1)=A(t); B(t+1)=B(t)

$$X(t+1) = [I - A(t+1)]^{-1}.x(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{310}{231} & \frac{145}{462} & \frac{65}{231} \\ \frac{50}{231} & \frac{545}{462} & \frac{85}{231} \\ \frac{10}{33} & \frac{5}{33} & \frac{50}{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 814,935 \\ 373,3766 \\ 772,73 \end{pmatrix}$$

Tính $x_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $x_{ij}(t+1) = a_{ij}.X_j(t+1)$

$\Rightarrow x_{11} = 162{,}987$; $x_{12} = 74{,}675$; $x_{13} = 77{,}273$;
$x_{21} = 81{,}493$; $x_{22} = 37{,}3376$; $x_{23} = 154{,}546$;
$x_{31} = 122{,}24$; $x_{32} = 18{,}67$; $x_{33} = 231{,}82$;
Tính $y_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $y_{ij}(t+1) = b_{ij}.X_j(t+1)$
$\Rightarrow y_{11} = 40{,}749$; $y_{12} = 37{,}33766$; $y_{13} = 115{,}9085$;
$y_{21} = 81{,}493$; $y_{22} = 56{,}0062$; $y_{23} = 38{,}6365$;
$y_{31} = 81{,}493$; $y_{32} = 37{,}33766$; $y_{33} = 38{,}6365$;
$y_{41} = 81{,}493$; $y_{42} = 37{,}33766$; $y_{43} = 38{,}6365$;
$y_{51} = 162{,}987$; $y_{52} = 74{,}675$; $y_{53} = 77{,}273$.
Vậy bảng cân đối liên ngành năm (t+1) là :

Giá trị tổng sản lượng	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
814,935	162,987	74,675	77,273	500
373,3766	81,493	37,3376	154,546	100
772,73	122,24	18,67	231,82	400
Nhập khẩu	40,749	37,3376	115,9085	
Lương	81,493	56,0062	38,6365	
Khấu hao	81,493	37,3376	38,6365	
Thuế	81,493	37,3376	38,6365	
Lợi nhuận	162,987	74,675	77,273	

<u>Bài 30 :</u>

Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t

Giá trị Tổng sản lượng	**Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian**			**Giá trị sản phẩm cuối cùng**
1450	**290**	**0**	**450**	
1990	**145**	**199**	**150**	
1500	**290**	**398**	**150**	
Nhập khẩu	**72,5**	**398**	**150**	
Lương	**145**	**298,5**	**150**	
Khấu hao	**145**	**99,5**		
Thuế	**72,5**	**199**	**150**	
Lợi nhuận	**290**	**398**	**225**	

a) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng

$y_{33} = X_3 - (\sum_{j=1}^{3} x_{3j}) - y_{13} - y_{23} - y_{43} - y_{53} = 1500 - (450+150+150) - 150 - 150 - 150 - 225 = 75$

$x_1 = X_1 - \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 1450 - (290+0+450) = 710$

$x_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 1990 - (145+199+150) = 1496$

$x_3 = X_3 - \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 1500 – (290+398+150) = 662$

b) Tính ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t

$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{290}{1450} = 0,2$; $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{0}{1990} = 0$; $a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{450}{1500} = 0,3$;

$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{145}{1450} = 0,1$; $a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{199}{1990} = 0,1$; $a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{150}{1500} = 0,1$;

$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{290}{1450} = 0,2$; $a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{398}{1990} = 0,2$; $a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{150}{1500} = 0,1$.

⇒ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

$$C = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,3 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{395}{286} & \frac{15}{143} & \frac{135}{286} \\ \frac{5}{26} & \frac{15}{13} & \frac{5}{26} \\ \frac{50}{143} & \frac{40}{143} & \frac{180}{143} \end{pmatrix}$$

Ý nghĩa phần tử $c_{23} = \frac{5}{26} \approx 0,1923$ là: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 3, thì ngành 2 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là 0,1923.

c) Tìm ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.

$b_{11} = \frac{y_{11}}{X_1} = \frac{72,5}{1450} = 0,05$; $b_{12} = \frac{y_{12}}{X_2} = \frac{398}{1990} = 0,2$; $b_{13} = \frac{y_{13}}{X_3} = \frac{150}{1500} = 0,1$;

$b_{21} = \frac{y_{21}}{X_1} = \frac{145}{1450} = 0,1$; $b_{22} = \frac{y_{22}}{X_2} = \frac{298,5}{1990} = 0,15$; $b_{23} = \frac{y_{23}}{X_3} = \frac{150}{1500} = 0,1$;

$b_{31} = \frac{y_{31}}{X_1} = \frac{145}{1450} = 0,1$; $b_{32} = \frac{y_{32}}{X_2} = \frac{99,5}{1990} = 0,05$; $b_{33} = \frac{y_{33}}{X_3} = \frac{75}{1500} = 0,05$;

$b_{41} = \frac{y_{11}}{X_1} = \frac{72,5}{1450} = 0,05$; $b_{42} = \frac{y_{42}}{X_2} = \frac{199}{1990} = 0,1$; $b_{43} = \frac{y_{43}}{X_3} = \frac{150}{1500} = 0,1$;

$b_{51} = \frac{y_{51}}{X_1} = \frac{290}{1450} = 0,2$; $b_{52} = \frac{y_{52}}{X_2} = \frac{398}{1990} = 0,2$; $b_{53} = \frac{y_{53}}{X_3} = \frac{225}{1500} = 0,15$;

⇒ ma trận các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t là:

$$B = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,15 \end{bmatrix}$$

Ý nghĩa kinh tế của phần tử $b_{13} = 0,1$ là: Để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành 3 thì ngành này phải sử dụng trực tiếp 0,1 đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ 1.

d) Ta có : $X_j(t+1) = C.\ x_j(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{395}{286} & \frac{15}{143} & \frac{135}{286} \\ \frac{5}{26} & \frac{15}{13} & \frac{5}{26} \\ \frac{50}{143} & \frac{40}{143} & \frac{180}{143} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1916 \\ 2077 \\ 1776 \end{bmatrix}$

Tính $x_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $x_{ij}(t+1) = a_{ij}.X_j(t+1)$

$\Rightarrow x_{11} = 383$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 533$;

$x_{21} = 191$; $x_{22} = \frac{2700}{13} \approx 208$; $x_{23} = 178$;

$x_{31} = 383$; $x_{32} = \frac{5400}{13} \approx 415$; $x_{33} = 178$;

Tính $y_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $y_{ij}(t+1) = b_{ij}.X_j(t+1)$

$\Rightarrow y_{11} = 95{,}8$; $y_{12} = 415$; $y_{13} = 178$;

$y_{21} = 191{,}6$; $y_{22} = 311{,}5$; $y_{23} = 178$;

$y_{31} = 191{,}6$; $y_{32} = 103{,}8$; $y_{33} = 88$;

$y_{41} = 95{,}8$; $y_{42} = 207{,}7$; $y_{43} = 178$;

$y_{51} = 384{,}2$; $y_{52} = 415$; $y_{53} = 265$.

Kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1) là :

Giá trị	Giá tị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SP cuối cùng
1916	383	0	533	1000
2077	191	208	178	1500
1776	383	415	178	800
Nhập khẩu	95,8	415	178	
Lương	191,6	311,5	178	
Khấu hao	191,6	103,8	88	
Thuế	95,8	207,7	178	
Lợi nhuận	384,2	415	265	

<u>Bài 31:</u> Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp và chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{0,2} & \mathbf{0,15} & \mathbf{0,2} \\ \mathbf{0.3} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,3} \\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,25} \end{pmatrix}$**; C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1,518} & \mathbf{0,47} & \mathbf{0,741} \\ \mathbf{0,759} & \mathbf{1,664} & \mathbf{1,085} \\ \mathbf{0,506} & \mathbf{0,633} & \mathbf{2,152} \end{pmatrix}$

a) Hãy giải thích ý nghĩa của tổng các phần tử nằm trên cột 3 của ma trận A

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i3} = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}75$$

Ý nghĩa: Để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 3 thì ngành thứ nhất, thứ hai, thứ ba phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,75.

b) Cho biết sang năm (t+1) các hệ số kỹ thuật không thay đổi, nếu mục tiêu giá trị

sản phẩm dành cho nhu cầu cuối cùng ngành thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tăng 15; 10; 12 đơn vị giá trị thì giá trị sản lượng các ngành cần tăng thêm bao nhiêu đơn vị để đáp ứng mục tiêu đó.

Theo đề bài, ta có: $\Delta x = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

Mặc khác: $X_j = [I - A_{ij}]^{-1}.\ x_{ij} = C.x_{ij}$

$\Leftrightarrow \Delta X_j = C.\Delta x_{ij} = \begin{pmatrix} 1{,}518 & 0{,}47 & 0{,}741 \\ 0{,}759 & 1{,}664 & 1{,}085 \\ 0{,}506 & 0{,}633 & 2{,}152 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36{,}362 \\ 41{,}045 \\ 39{,}744 \end{bmatrix}$

<u>Bài 32:</u> Cho bảng cân đối liên ngành năm t như sau:

Giá trị	**Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian**			**Giá trị SP cuối cùng**
250	**50**	**35**	**30**	**x_1**
180	**x_{21}**	**25**	**35**	**95**
150	**40**	**25**	**30**	**95**
Nhập khẩu	**10**	**y_{12}**	**5**	
Tiền lương	**30**	**15**	**20**	
Khấu hao	**y_{31}**	**10**	**5**	
Thuế	**20**	**10**	**10**	
Lợi nhuận	**65**	**50**	**15**	

a) **Hãy tìm các số liệu còn thiếu trong bảng trên và tính ma trận hệ số kỹ thuật, giải thích ý nghĩa kinh tế của a_{32}.**

$x_{21} = 180 - (25+35+95) = 25$

$x_1 = 250 - (50+35+30) = 135$

$y_{12} = 180 - (35+25+25+15+10+10+50) = 10$

$y_{31} = 250 - (50+25+40+10+30+20+65) = 10$

Ta đi tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp

$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{50}{250} = 0{,}2$; $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{35}{180} = 0{,}194$; $a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{30}{150} = 0{,}2$;

$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{25}{250} = 0{,}1$; $a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{25}{180} = 0{,}139$; $a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{35}{150} = 0{,}23$;

$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{40}{250} = 0{,}16$; $a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{25}{180} = 0{,}139$; $a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{30}{150} = 0{,}2$.

$\Rightarrow$ Ma trận hệ số chi phí trực tiếp

$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}194 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}139 & 0{,}23 \\ 0{,}16 & 0{,}139 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

Ý nghĩa kinh tế của a_{32} = 0,139 là: Để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 2 thì ngành 3 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,139.

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ :

$$C = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,194 & -0,2 \\ -0,1 & 0,861 & -0,23 \\ -0,16 & -0,139 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,39 & 0,387 & 0,459 \\ 0,247 & 1,287 & 0,432 \\ 0,321 & 0,301 & 1,417 \end{pmatrix}$$

b) Cho x(t+1)= (180 120 80), các hệ số khác không đổi. Hãy lập kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1).

Ta có : $X_j(t+1) = C.\ x_j(t+1) = \begin{pmatrix} 1,39 & 0,387 & 0,459 \\ 0,247 & 1,287 & 0,432 \\ 0,321 & 0,301 & 1,417 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 180 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333,4266 \\ 233,46 \\ 207,249 \end{bmatrix}$

Tính $x_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $x_{ij}(t+1) = a_{ij}.X_j(t+1)$

$\Rightarrow x_{11} = 66,685$; $x_{12} = 45,2912$; $x_{13} = 41,4498$;

$x_{21} = 33,342$; $x_{22} = 32,451$; $x_{23} = 47,667$;

$x_{31} = 53,3482$; $x_{32} = 32,451$; $x_{33} = 41,4498$;

Tính $y_{ij}(t+1)$ ta áp dụng công thức : $y_{ij}(t+1) = b_{ij}.X_j(t+1)$

Với $b_{ij} = \frac{y_{ij}}{X_j}$ ta có : $B = \begin{pmatrix} 0,04 & \frac{1}{18} & \frac{1}{30} \\ 0,12 & \frac{1}{12} & \frac{2}{15} \\ 0,04 & \frac{1}{18} & \frac{1}{30} \\ 0,08 & \frac{1}{18} & \frac{1}{15} \\ 0,26 & \frac{5}{18} & 0,1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y_{11} = 13,337$; $y_{12} = 12,97$; $y_{13} = 7$;

$y_{21} = 40$; $y_{22} = 19,5$; $y_{23} = 28$;

$y_{31} = 13,337$; $y_{32} = 12,97$; $y_{33} = 7$;

$y_{41} = 26,674$; $y_{42} = 12,97$; $y_{43} = 13,9575$;

$y_{51} = 86,7034$; $y_{52} = 64,8568$; $y_{53} = 20,7249$.

Kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1) là :

Giá trị	Giá tị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SP cuối cùng
333,4266	66,685	45,2912	41,4498	180
233,46	33,342	32,451	47,667	120
207,249	53,3482	32,451	41,4498	80
Nhập khẩu	13,337	12,97	7	
Lương	40,	19,5	28	
Khấu hao	13,337	12,97	7	

Thuế	26,674	12,97	13,9575	
Lợi nhuận	86,7034	64,8568	20,7249	

<u>Bài 33:</u> Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,1} & \mathbf{0,15} & \mathbf{0,15} \\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,1} & \mathbf{0,2} \\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,15} & \mathbf{0,1} \\ \mathbf{0,15} & \mathbf{0,1} & \mathbf{0,1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{1,302} & \mathbf{0,245} & \mathbf{0,33} \\ \mathbf{0,538} & \mathbf{1,406} & \mathbf{0,354} \\ \mathbf{0,264} & \mathbf{0,34} & \mathbf{1,226} \end{pmatrix}$$

a) Cho các giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (3000; 2800; 4000). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị của các ngành?

b) Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3;4;8). Trong năm (t+1) theo dự báo thì chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp là (1,05; 1,1;1,2;1,15), tính giá 1 đơn vị sản phẩm ngành năm (t+1)?

<u>Giải:</u>

a) $C= (I_3 - A)^{-1} \Rightarrow I_3 - A = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0,85 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,15 \\ -0,1 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$

X(t)=(3000;28000;4000)

$x(t)=X(t)\times(I_3 - A)=\begin{pmatrix} 1470 \\ 740 \\ 2740 \end{pmatrix}$

❖ Bảng cân đối liên ngành

Giá trị tổng sản lượng	GT sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị sản phẩm cung cấp
3000	450	280	800	1470
2800	900	560	600	740
4000	300	560	400	2740

Nhập khẩu	300	420	600	
Tiền lương	300	280	800	
Khấu hao	300	420	400	
Thuế	450	280	400	

b) $w^T = (1{,}05;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}15)$

$$K^T = w^T.B.C = (0{,}5075;\ 0{,}5625;\ 0{,}6125)\ .\begin{pmatrix} 1{,}302 & 0{,}245 & 0{,}33 \\ 0{,}538 & 1{,}406 & 0{,}354 \\ 0{,}264 & 0{,}34 & 1{,}226 \end{pmatrix}$$

$= (1{,}125;\ 1{,}23;\ 1{,}118)$

$\Rightarrow$ Giá một đơn vị sản phẩm các ngành năm (t+1) là: $P_j(t+1) = P_j(t).K_j$

$P_1(t+1) = P_1(t).K_1 = 3.1{,}125 = 3{,}375$

$P_2(t+1) = P_2(t).K_2 = 4.1{,}23 = 4{,}492$

$P_3(t+1) = P_3(t).K_3 = 8.1{,}118 = 8{,}944$

Vậy giá một đơn vị sản phẩm các ngành năm (t+1) là: (3,375 ; 4,492 ; 8,944).

Bài 34: Ma trận hệ số chi phí trực tiếp A, ma trận hệ số yếu tố đầu vào sơ cấp B dạng giá trị năm t:

$$A=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 & 0,25 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,15 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,15 & 0,1 \\ 0,15 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

a) Cho giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (1500;2500;3200). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t?

b) Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (2;3;5). Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t và ý nghĩa của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3 của ma trận đó?

Giải:

a) $$I_3-A=\begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}1 & -0{,}25 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

$$x(t)=(I_3-A).X(t)=\begin{pmatrix} 225 \\ 1380 \\ 2320 \end{pmatrix}$$

$x_{ij}(t)=a_{ij}.X(t)$

❖ Bảng cân đối liên ngành

Giá trị tổng	Giá trị sản phẩm trao đổi	Giá trị SPCC

sản phẩm				
1500	225	250	625	225
2500	300	500	250	1380
3200	150	250	375	2320
Nhập khẩu	300	375	320	
Lương	150	500	320	
Khấu hao	150	375	320	
Thuế	225	250	320	

b) Ta có giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là: $(P_1; P_2; P_3) = (2; 3; 5)$.

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t

Ta có: $\alpha_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} = \frac{q_{ij}.p_i}{Q_j.p_j}.\frac{p_j}{p_i} = a_{ij}.\frac{p_j}{p_i}$

$\Rightarrow \alpha_{11} = a_{11}.\frac{p_1}{p_1} = 0{,}15.\frac{2}{2} = 0{,}15$; $\alpha_{12} = a_{12}.\frac{p_2}{p_1} = 0{,}1.\frac{3}{2} = 0{,}15$;

$\alpha_{21} = a_{21}.\frac{p_1}{p_2} = 0{,}2.\frac{2}{3} = 0{,}133$; $\alpha_{22} = a_{22}.\frac{p_2}{p_2} = 0{,}2.\frac{3}{3} = 0{,}2$;

$\alpha_{31} = a_{31}.\frac{p_1}{p_3} = 0{,}1.\frac{2}{5} = 0{,}04$; $\alpha_{32} = a_{32}.\frac{p_2}{p_3} = 0{,}1.\frac{3}{5} = 0{,}06$;

$\alpha_{13} = a_{13}.\frac{p_3}{p_1} = 0{,}25.\frac{5}{2} = 0{,}625$; $\alpha_{23} = a_{23}.\frac{p_3}{p_2} = 0{,}1.\frac{5}{3} = 0{,}167$;

$\alpha_{33} = a_{33}.\frac{p_3}{p_3} = 0{,}15.\frac{5}{5} = 0{,}15$.

Vậy ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t là

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}625 \\ 0{,}133 & 0{,}2 & 0{,}167 \\ 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Hệ số α_{23} cho biết để ngành thứ 3 sản xuất được 1 đơn vị sản phẩm, thì ngành thứ 2 phải cung cấp cho nó 0,167 đơn vị sản phẩm dưới dạng tư liệu sản xuất.

<u>Bài 35:</u> Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:

$$B=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 1{,}175 & 0{,}292 & 0{,}275 \\ 0{,}213 & 1{,}188 & 0{,}263 \\ 0{,}1 & 0{,}167 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

a) **Biết giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (5000;3000;6500). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t?**
b) **trong năm (t+1) các yếu tố kĩ thuật , kinh tế không đổi. Biết chỉ số giá của các yếu tố đầu vào sơ cấp của các ngành được dự báo làn lượt là (1,5;1,2;1,1;2) và giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3;4;5;2). Hãy tính sự biến động giá của năm (t+1) so với năm t?**

<u>Giải:</u>

a) I_3-A= C^{-1}=$\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}9 & -0{,}15 \\ -0{,}05 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

⇨A=$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

x(t)= X(t).(I-A)=$\begin{pmatrix} 2925 \\ 975 \\ 4650 \end{pmatrix}$

$x_{ij}(t)=a_{ij}.X(t)$

$y_{ij}(t)=b_{ij}.X(t)$

❖ bảng cân đối liên ngành

Giá trị tổng sản lượng	Giá trị sản phẩm trao đổi			Giá trị SPCC
5000	500	600	975	2925
3000	750	300	975	975
6500	250	300	1300	4650
Nhập khẩu	1000	500	650	
Lương	1250	1000	975	
Khấu hao	250	1000	975	
Thuế	1000	500	650	

b) Ta có giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là:
$(P_1; P_2; P_3) = (3; 4{,}5; 2)$
Chỉ số giá của các yếu tố đầu vào sơ cấp của các ngành năm (t+1) là: $w^T = (1{,}5; 1{,}2; 1{,}1; 2)$.
Mặc khác:

$K^T = w^T.B.C$

$= (1,055;\ 0,81;\ 0,695).\begin{pmatrix} 1,175 & 0,292 & 0,275 \\ 0,213 & 1,158 & 0,263 \\ 0,1 & 0,167 & 1,3 \end{pmatrix}$

$= (1,481;\ 1,385;\ 1,406)$

$\Rightarrow$ Sự biến động giá của năm (t+1) so với năm t:

$\Delta P_j = P_j(t+1) - P_j(t) = P_j(t).K_j - P_j(t) = P_j(t).(K_j - 1)$

$\Rightarrow \Delta P_1 = P_1(t).(K_1 - 1) = 3.(1,481 - 1) = 1,443$

$\Delta P_2 = P_2(t).(K_2 - 1) = 4,5.(1,385 - 1) = 1,7325$

$\Delta P_3 = P_3(t).(K_3 - 1) = 2.(1,406 - 1) = 0,812.$

Chương III :

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Bài 1: Lập mô hình bài toán

1.1. Nhân dịp tết trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh "Trăng" muốn sản xuất 3 loại bánh : đậu xanh, thập cẩm và bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất 3 loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, đậu, bột, trứng, mứt, lạp xưởng, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 500kg, đậu là 300kg, các nguyên liệu khác muốn bao nhiêu cũng có. Lượng đường, đậu cần thiết và lợi nhuận thu được trên một cái bánh mỗi loại cho trong bảng sau

Bánh Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo
Đường (g)	60	40	70
Đậu (g)	80	0	40
Lợi nhuận (đồng)	2000	1700	1800

Cần lập kế hoạch sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng lợi nhuận thu được là lớn nhất nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết.

Giải:

Gọi là x_1 là số bánh đậu xanh; x_2 là số bánh thập cẩm; x_3 l à số bánh dẻo nhân đậu xanh. Khi đó 2 hàm mục ti êu l à: $f(x) = 2000x_1 + 1700x_2 + 1800x_3 \rightarrow \max$

Các ràng buộc: $\begin{cases} 60x_1 + 40x_2 + 70\,x_3 \le 500000 \\ 80x_1 + 40x_3 \le 300000 \end{cases}$

<u>1.2</u>. Một xí nghiệp dệt hiện có 3 loại sợi : Cotton, Katé, Polyester với khối lượng tương ứng là 3; 2,5; 4,2 (tấn). Các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn. Xí nghiệp có thể sản xuất ra 3 loại vải A, B, C (với khổ bề rộng nhất định) với mức tiêu hao các loại sợi để sản xuất ra một mét vải các loại cho trong bảng sau

Loại vải Loại sợi (g)	**A**	**B**	**C**
Cotton	**200**	**200**	**100**
Katé	**100**	**200**	**100**
polyester	**100**	**100**	**200**

Biết lợi nhuận thu được khi sản xuất một mét vải các loại A, B, C tương ứng là 350, 480, 250 (đồng). Sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết với số lượng không hạn chế, nhưng tỷ lệ về số mét vải của B và C phải là 1 : 2.

Hãy xây dựng bài toán tìm kế hoạch sản xuất tối ưu.

<u>Giải:</u>

Gọi x_1 , x_2, x_3 lần lượt là số mét vả A, B, C cần sản xuất, $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

Tổng lợi nhuận thu được $f = 350x_1 + 480x_2 + 250x_3$(đồng) $\rightarrow \max$

$$\begin{cases} 200x_1 + 200x_2 + 100x_3 \le 3000000 \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \le 2500000 \\ 100x_1 + 100x_2 + 200x_3 \le 4200000 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,3}$

<u>1.3.</u>

Một trại chăn nuôi định nuôi 3 loại bò : bò sữa, bò cày và bò thịt. Số liệu điều tra được cho trong bảng sau, với đơn vị tính là ngàn đồng / con.

Loại bò Chi phí	**Bò sữa**	**Bò cày**	**Bò thịt**	**Dự trữ**

Vốn	**123**	**127**	**162**	**7020**
Chi phí chăn nuôi	**18**	**15**	**15**	**800**
Lời	**59**	**49**	**57**	

Tìm số bò mỗi loại cần nuôi sao cho tổng tiền lời là lớn nhất. Biết rằng số bò sữa không quá 18 con.

Giải:

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là bò sữa, bò cày, bò thịt

Ta có:

F(x) : $59x_1 + 49x_2 + 57x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 123x_1 + 127x_2 + 162x_3 \le 7020 \\ 18x_1 + 15x_2 + 15x_3 \le 800 \\ x1 \le 800 \end{cases}$$

1.4. Một đội sản xuất dự định dùng 31 sào đất để trồng bắp cải, cà chua, đậu, khoai tây, hành. Các số liệu cho trong bảng sau

Tài nguyên	Dự trữ	Bắp cải	Cà chua	Đậu	Khoai tây	Hành
Lao động (công/sào)	**1892**	**79**	**55**	**23**	**26**	**35**
Chi phí (ngàn đồng/sào)	**1828**	**38**	**22**	**31**	**63**	**50**
Lời (ngàn đồng/sào)		**376**	**128**	**104**	**177**	**310**

Giải:

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lần lượt là số sào đất để trồng bắp cải, cà chua, đậu, khoai tây, hành.

Vì sô sào đất không thể trồng là số âm nên ta có các điều kiện:

$X_j \ge 0$, j = $\overline{1{,}5}$

Tổng lời thu được là :

f(x) = $376x_1 + 128x_2 + 104x_3 + 177x_4 + 310x_5$

Do số lượng lao động và chi phí không thể vượt qua số lượng hiện có nên :

$$\begin{cases} 79x_1 + 55x_2 + 23x_3 + 26x_4 + 35x_5 \le 1892 \\ 38x_1 + 22x_2 + 31x_3 + 63x_4 + 50x_5 \le 1828 \end{cases}$$

Tổng sô sào đất hiện có:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$$

Ta có bài toán :

f(x) = $376x_1 + 128x_2 + 104x_3 + 177x_4 + 310x_5 \rightarrow$ max

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 79x_1 + 55x_2 + 23x_3 + 26x_4 + 35x_5 \le 1892 \\ 38x_1 + 22x_2 + 31x_3 + 63x_4 + 50x_5 \le 1828 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

1.5

Để sản xuất 3 loại sản phẩm I, II, III, người ta cần dùng 4 loại nguyên liệu N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , với các số liệu được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	Dự trữ	Sản phẩm I	Sản phẩm II	Sản phẩm III
N1	22	2	3	1
N2	16	2	1	0
N3	18	0	0	3
N4	21	3	3	4
Thu nhập		7	5	6

Tìm phương án phân phối sản xuất sao cho tổng thu nhập của xí nghiệp là lớn nhất.

Giải:

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số sản phẩm xí nghiệp sx

Ta có hàm mục tiêu f(x) = $7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow$ min

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 22 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_3 \le 18 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 21 \\ Với\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Đưa về dạng chính tăc :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 + x_4 \ \le 22 \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 = 16 \\ \qquad\qquad x_3 \ \ + \ \ \ x_6 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad x_7 = 21 \end{cases}$$

Bảng đơn hình :

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	22	2	3	1	1	0	0	0
x_5	16	2	1	0	0	1	0	0
x_6	18	0	0	1	0	0	1	0
x_7	21	3	3	4	0	0	0	1
f(x)	0	7	5	6	0	0	0	0

Hàng cuối cùng có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất là 7 và phần tử trục xoay là hàng thứ 4

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	8	0	1	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$
x_5	2	0	-1	$-\frac{8}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$
x_6	18	0	0	1	0	0	1	0
x_1	7	1	1	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
f(x)	-49	0	-2	$-\frac{10}{3}$	0	0	0	$-\frac{7}{3}$

Vậy phương án tối ưu là (7, 0, 0) với fmax = 49

<u>1.6</u>. Một chủ nông trại có quyền sở hữu 100 mẫu đất dự định trồng 3 loại cây A, B, C. Chi phí hạt giống tương ứng cho 3 loại cây A, B, C là 40\$, 20\$, 30\$. Số tiền tối đa có thể chi cho việc mua hạt giống là 3200\$. Số ngày công chăm sóc cho các loại cây A, B, C trên một mẫu tương ứng là 1, 2, 1. Số ngày công tối đa có thể có là 160. Nếu lợi nhuận trên một mẫu của mỗi loại cây cho bởi : A là 100\$, B là 300\$, C là 200\$, thì phải trồng mỗi loại cây bao nhiêu mẫu để thu lợi nhuận tối đa.

<u>Giải:</u>

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số mẫu đất trồng loại cây A, B, C

Ta có hàm mục tiêu: $f(x) = 100x_1 + 300x_2 + 200x_3$

Rút gọn: $f(x) = 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow max$

Các ràng buộc:

$$\begin{cases} 40x_1 + 20x_2 + \ 30x_3 \ \le 3200 \\ x_1 + 2x_2 + \ x_3 \ \le 160 \\ x_1 + x_2 + \ x_3 = 100 \end{cases} \xRightarrow{rút\ gọn} \begin{cases} 4x_1 + \ 2x_2 + 3x_3 \le 320 \\ x_1 + \ 2x_2 + x_3 \le 160 \\ x_1 + \ x_2 + 3x_3 \le 100 \end{cases}$$

Đưa về dạng chính tắc:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \ 30x_3 = 320 \\ x_1 + \ 2x_2 \ + x_3 \ \ + x_5 = 160 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad x_6 = 100 \end{cases}$$

Đặt g(x) = -f(x) = $-x_1 -3x_2 - 2x_3 +Mx_6 \rightarrow$min

Hệ số	ACS	0	-1	-3	-2	0	0
		SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	320	4	2	3	1	0
0	x_5	160	1	2	1	0	1
M	x_6	100	1	1	1	0	0
	$\overline{g}$	0	1	3	2	0	0
		100	1	1	1	0	0

Trên dòng cuối cùng ta chọn phần tử ở cột thứ 2

Trên cột đó ta chọn phần tử trục xoay ở dòng thứ 2

Ta có bảng đơn hình:

D2 := $\frac{1}{2}d2$; d1:= $d1 - d2$;d3:= $d3 - d2$;d4:= $d4 - 3d2$; d5:= $d5 - d2$

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	160	3	0	2	1	-1
x_2	80	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_6	20	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\overline{g}$	-240	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
	20	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Trên dòng cuối cùng ta chọn phần tử ở cột thứ 3, trên cột đó ta chọn phần tử ở dòng 3

Ta có bảng đơn hình sau :

$$d2 := 3d3; d1 := d1 - 2\, d3;\ d2 := d2 - \frac{1}{2}d3;\ d4 := d4 - \frac{1}{2}d3;\ d5 := d5 - \frac{1}{2}d3$$

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	80	1	0	0	1	1
x_2	60	0	1	0	0	1
x_3	40	1	0	1	0	-1
$\overline{g}$	-260	-1	0	0	0	-1
	0	0	0	0	0	1

Trên dòng 4 các phần tử đều <0

Bài toán có phương án tối ưu là x = (0,60,40) với f(x) = 26000

1.7. Một hãng sản xuất máy vi tính có hai phân xưởng lắp ráp A, B và hai đại lý phân phối I, II. Xưởng A có thể ráp tối đa 700 máy/tháng và xưởng B ráp tối đa 900 máy/tháng. Đại lý I tiêu thụ ít nhất 500 máy/tháng và đại lý II tiêu thụ ít nhất 1000 máy/tháng. Cước phí vận chuyển một máy từ các xưởng đến các đại lý cho trong bảng sau

	Đại lý I	**Đại lý II**
Xưởng A	**6$**	**5$**
Xưởng B	**4$**	**6$**

Tìm kế hoạch vận chuyển tối ưu để tổng cước phí vận chuyển máy từ các xưởng đến các đại lý phân phối cực tiểu.

Giải:

Gọi X_1 là số máy từ xưởng A đến đại lý I

Gọi X_2 là số máy từ xưởng B đến đại lý I

Gọi X_3 là số máy từ xưởng A đến đại lý II

Gọi X_4 là số máy từ xưởng B đến đại lý II

$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 700 \\ x_2 + x_4 \le 900 \\ x_1 + x_2 \ge 500 \\ x_3 + x_4 \ge 1000 \end{cases}$$

Bài tập dạng chính tắc

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 \quad + \quad x_5 \quad = \; 700 \\ \quad x_2 + x_4 + \quad\quad x_6 \quad = \; 900 \\ x_1 + x_2 \quad\quad - x_7 \quad = 500 \\ \quad\quad x_3 + x_4 - x_8 \quad = 1000 \end{cases}$$

Dạng (M)

$\overline{F}(x) = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 + Mx_9 + Mx_{10} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 \quad + \quad x_5 \quad = \; 700 \\ x_2 + \quad x_4 + \quad\quad x_6 \quad = \; 900 \\ x_1 + x_2 \quad - x_7 + x_9 \quad = 500 \\ x_3 + x_4 - x_8 + x_{10} \quad = 1000 \end{cases}$$

Hệ số	ACS	0	6	4	5	8	0	0	0	0
		SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_5	700	1	0	1	0	1	0	0	0
0	x_6	900	0	1	0	1	0	1	0	0
M	x_9	500	1	1	0	0	0	0	-1	0
M	x_{10}	1000	0	0	1	1	0	0	0	-1
	$\overline{f}$	0	-6	-4	-5	-8	0	0	0	0
		1500	1	1	1	1	0	0	-1	-1

Chọn cột x_2 (do M-4 lớn nhất), ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (500<900), thực hiện phép đổi (2):=(2)-(3); (5) :=(5) + 4(3); (6) :=(6)-(3)

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_5	700	1	0	1	0	1	0	0	0
x_6	400	-1	0	0	1	0	1	1	0
x_2	500	1	1	0	0	0	0	-1	0
x_{10}	1000	0	0	1	1	0	0	0	-1
$\overline{f}$	2000	-2	0	-5	-8	0	0	-4	0
	1000	0	0	1	1	0	0	0	-1

(4):=(4)-(1); (5) :=(5)+5(1); (6) := (6)-(1)

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	700	1	0	1	0	1	0	0	0
x_6	400	-1	0	0	1	0	1	1	0
x_2	500	1	1	0	0	0	0	-1	0
x_{10}	300	-1	0	0	1	-1	0	0	-1

$\overline{f}$	5500	3	0	0	-8	5	0	-4	0
	300	-1	0	0	1	-1	0	0	-1

(2):=(2)-(4); (5) :=(5)+8(4); (6) := (6)-(4)

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	700	1	0	1	0	1	0	0	0
x_6	100	-0	0	0	0	-1	1	1	1
x_2	500	1	1	0	0	0	0	-1	0
x_4	300	-1	0	0	1	-1	0	0	-1
$\overline{f}$	7900	-5	0	0	0	-3	0	-4	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	700	1	0	1	0	1	0	0	0
x_6	100	0	0	0	0	-1	1	1	1
x_2	500	1	1	0	0	0	0	-1	0
x_4	300	-1	0	0	1	-1	0	0	-1
f	7900	-5	0	0	0	-3	0	-4	8

Vậy bài toán có phương án tối ưu (0; 500; 700; 300; 0; 100; 0; 0)

1.8

Có 2 nơi cung cấp khoai tây I và II theo khối lượng lần lượt là 100 tấn và 200 tấn. Có 3 nơi tiêu thụ khoai tây: A, B, C với yêu cầu tương ứng là 75 tấn, 125 tấn và 100 tấn. Cước phí vận chuyển (ngàn/tấn) vận chuyển từ các nơi cung cấp đến nơi tiêu thụ được cho trong bảng sau

Tiêu thụ Cung cấp	**A**	**B**	**C**
I	**10**	**14**	**30**
II	**12**	**20**	**17**

Muốn chuyên chở khoai tây với tổng cước phí nhỏ nhất. Lập mô hình bài toán.

Giải:

Gọi x_{ij} là lượng khoai tây vận chuyển từ nơi cung cấp tới nơi tiêu thụ.

(i = I, II; j = A, B, C; $x_{ij} \geq 0$)

Hàm mục tiêu là tổng ước phi vận chuyển.

$f(x) = 10x_{IA} + 14\, x_{IB} + 30\, x_{IC} + 12\, x_{IIA} + 17\, x_{IIB} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{IA}} + x_{\mathrm{IB}} + x_{\mathrm{IC}} = 100 \\ x_{\mathrm{IIA}} + x_{\mathrm{IIB}} + x_{\mathrm{IIC}} = 200 \\ x_{\mathrm{IIA}} + x_{\mathrm{IIA}} = 75 \\ x_{\mathrm{IB}} + x_{\mathrm{IIB}} = 125 \\ x_{\mathrm{IC}} + x_{\mathrm{IIC}} = 100 \end{cases}$$

1.9

Một người có số tiền là 100 tỷ đồng dự định đầu tư vào các loại hình sau đây:

• Gửi tiết kiệm không kỳ hạn với suất là 6,5%/năm.

• Gửi tiết kiệm có kỳ hạn với lãi suất 8,7%/năm.

• Mua tín phiếu với lãi suất là 10%/năm.

• Cho doanh nghiệp tư nhân vay với lãi suất lá 13%/năm.

Để tránh rủi ro, người này quyết định đầu tư theo các chỉ dẫn của nhà tư vấn đầu tư như

sau:

• Không cho doanh nghiệp tư nhân vay quá 20% số vốn.

• Số tiền mua tín phiếu không vượt quá tổng số tiền đầu tư vào 3 loại hình kia

• Đầu tư ít nhất là 30% tổng số tiền vào gửi tiết kiệm có kỳ hạn và mua tín phiếu.

• Tỷ lệ tiền gửi tiết kiệm không kỳ hạn trên tiền tiết liệm có kỳ hạn không quá 1/3.

• Người này cho vay toàn bộ số tiền.

Hãy lập mô hình toán , xác định phương án đầu tư tối ưu để người này đạt được lợi nhuận cao nhất, theo đúng chỉ dẫn của nhà đầu tư.

Giải:

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số lãi suất của phương án 1,2,3,4

Hàm mục tiêu:

$f(x) = 5{,}6\, x_1 + 8{,}7x_2 + 10x_3 + 13x_4 \rightarrow \max$

Ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ x_4 \leq 20 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 0 \\ x_2 + x_3 \geq 30 \\ 3x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$; $j = \overline{1,4}$

<u>1.10.</u>

Một công ty có kế hoạch quảng cáo một loại sản phẩm do công ty sản xuất trong thời gian một tháng với tổng chi phí là 100 triệu đồng. Các phương tiện được chọn để quảng cáo sản phẩm là : truyền hình, báo và phát thanh với số liệu được cho bởi bảng sau

Phương tiện quảng cáo	**Chi phí mỗi lần quảng cáo (triệu đồng)**	**Số lần quảng cáo tối đa trong tháng**	**Dự đoán số người xem trong mỗi tháng**
Truyền hình (1 phút)	**1,5**	**60**	**15000**
Báo (1/2 phút)	**1**	**26**	**30000**
Phát thanh (1 phút)	**0,5**	**90**	**9000**

Vì lý do chiến lược tiếp thị nên công ty yêu cầu phải có ít nhất 30 lần quảng cáo trên truyền hình trong tháng. Hãy lập mô hình bài toán sao cho phương án quảng cáo sản phẩm của công ty là tối ưu ?

<u>Giải:</u>

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số quảng cáo trên truyền hình, báo và phát thanh.

Mô hình bài toán là:

$$\begin{cases} 1.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 100 \\ 30 \leq x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 26 \\ x_3 \leq 90 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu: $f(x) = 15x_1 + 30x_2 + 9x_3 \rightarrow \max$

Đặt $g(x) = -f(x) = -15x_1 - 30x_2 - 9x_3 \rightarrow min$

Dạng chuẩn $\begin{cases} 1.5x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 100 \\ x_1 - x_4 = 30 \\ x_1 + x_5 = 60 \\ x_2 + x_6 = 26 \\ x_3 + x_7 = 90 \end{cases}$

Dạng (M) $\begin{cases} 1.5x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 100 \\ x_1 - x_4 + x_9 = 30 \\ x_1 + x_5 = 60 \\ x_2 + x_6 = 26 \\ x_3 + x_7 = 90 \end{cases}$

Hàm mục tiêu $g(x) = -15x_1 - 30x_2 - 9x_3 + M x_9$ => min

Hệ số	ACS	0	-15	-30	-9	0	0	0	0	0
		SHTD	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	x_8	100	1.5	1	0.5	0	0	0	0	1
M	x_9	30	1	0	0	-1	0	0	0	0
0	x_5	60	1	0	0	0	1	0	0	0
0	x_6	26	0	1	0	0	0	1	0	0
0	x_7	90	0	0	1	0	0	0	1	0
	g(x)	0	15	30	9	0	0	0	0	0
		0	1	0	0	-1	0	0	0	0

Phương án cực biên $g(x)_{min}$= 0 khi(0;0;0;0;60;26;90;100;0)

Hàng cuối cùng có 1 số dương trên cột này có hai số dương chọn phần tử trục xoay là hàng 2 vì tỉ số 30/1 là nhỏ nhất

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_4	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_8	55	0	1	0.5	1.5	0	0	0	1
x_1	30	1	0	0	-1	0	0	0	0
x_5	30	0	0	0	1	1	0	0	0
x_6	26	0	1	0	0	0	1	0	0
x_7	90	0	0	1	0	0	0	1	0
g(x)	-450	0	30	9	15	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dòng cuối có 3 số dương chọn cột 3 chọn hàng 4 làm phần tử trục xoay vì tỉ số 26/1 nhỏ nhất

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_8	29	0	0	0.5	1.5	0	-1	0	1
x_1	30	1	0	0	-1	0	0	0	0
x_5	30	0	0	0	1	1	0	0	0
x_6	26	0	1	0	0	0	1	0	0
x_7	90	0	0	1	0	0	0	1	0
g(x)	-1230	0	0	9	15	0	0	0	0

Dòng cuối có 2 số dương trên cột 4 dòng này chọn phần tử trục xoay là dòng 1 vì tỉ số 26/0.5 là nhỏ nhất

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	58	0	0	1	3	0	-2	0	1
x_1	30	1	0	0	-1	0	0	0	0
x_5	30	0	0	0	1	1	0	0	0
x_2	26	0	1	0	0	0	1	0	0
x_7	90	0	0	0	-3	0	2	1	-2
g(x)	-1752	0	0	0	12	0	-12	0	8

Dòng cuối cùng không có số dương nào

$g(x)_{min} = -1752$ khi (30;26;58;0;30)

⇨ $f(x)_{max} = 1752$ khi (0; 30;26;58).

<u>Bài 2:</u> Đưa các bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc

<u>Bài 2.1</u>

$$\mathbf{f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to min}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 \quad - x_3 \le 1} \\ \mathbf{x_2 + x_3 \ge 1} \quad \mathbf{(x_1 \ge 0)} \end{cases}$$

<u>Giải :</u>

Đặt : $x_2 = x_2' - x_2''$ $(x_2', x_2'' \ge 0)$

$x_3 = x_3' - x_3''$ $(x_3', x_3'' \ge 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = x_1 + x_2' - x_2'' + x_3' - x_3'' \to$ min

$$\begin{cases} x_1 - x_3' + x_3'' + x_4 = 1 \\ x_2' - x_2'' + x_3' - x_3'' - x_5 = 1 \end{cases}$$

$(x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0)$

Bài 2.2

$f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0 \,;\, x_2 \leq 0$$

Giải :

Đặt : $x_2' = -x_2 \ (x_2' \geq 0)$

$x_3 = x_3' - x_3'' \ (x_3', x_3'' \geq 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = 3x_1 + 2x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' - x_4 = 1 \\ -4x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' + x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_3' + 2x_3'' = 4 \end{cases} \qquad (x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0)$$

Bài 2.3

$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \leq 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

Giải :

Đặt : $x_3 = x_3' - x_3'' \ (x_3', x_3'' \geq 0)$

$x_4 = x_4' - x_4'' \ (x_4', x_4'' \geq 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_3' + 2x_3'' - x_4' + x_4'' \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4' + x_4'' + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4' - x_4'' + x_6 = 3 \\ x_2 + x_3' - x_3'' = 1 \end{cases} \qquad (x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4', x_4'', x_5, x_6 \geq 0)$$

Bài 2.4

$f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \leq 16 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq -8 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0 \,,\, x_3 \leq 0$$

Giải :

Đặt :

$x_3' = -x_3 \ (x_3' \geq 0)$

$x_4 = x_4' - x_4'' \ (x_4', x_4'' \geq 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = -2x_1 + x_2 - 4x_3' + 5x_4' - 5x_4'' \rightarrow$ min

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3' - 3x_4' + 3x_4'' + x_5 = 16 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3' - 2x_4' + 2x_4'' + x_6 = 8 \quad (x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'', x_5, x_6 \geq 0) \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3' + x_4' - x_4'' = 8 \end{cases}$$

<u>Bài 2.5</u>

$f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad x_1 \leq 0 \ ; x_2, x_3 \in \boldsymbol{R} \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 6 \end{cases}$$

<u>Giải :</u>

Đặt : $x_1' = -x_1 \ (x_1' \geq 0)$

$x_2 = x_2' - x_2'' \ (x_2', x_2'' \geq 0)$

$x_3 = x_3' - x_3'' \ (x_3', x_3'' \geq 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = -8x_1' + 7x_2' - 7x_2'' + 6x_3' - 6x_3'' \rightarrow$ max

$$\begin{cases} -x_1' + 2x_2' - 2x_2'' + x_3' - x_3'' = 2 \\ -2x_1' + x_2' - x_2'' + x_3' - x_3'' = 1 \qquad (x_1', x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4 \geq 0) \\ -x_1' + 5x_2' - 5x_2'' + 2x_3' - 2x_3'' + x_4 = 6 \end{cases}$$

<u>Bài 2.6</u>

$f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \qquad x_1, x_4 \leq 0 \ ; x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Giải :</u>

Đặt

$x_1' = -x_1 \ (x_1' \geq 0)$

$x_4' = -x_4 \ (x_4' \geq 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = -x_1' - 2x_2 + x_3 + 2x_4' \rightarrow$ max

$$\begin{cases} -x_1' + x_2 + x_3 - x_4' = 2 \\ x_1' + x_3 - 2x_4' = 1 \qquad (x_1', x_2, x_3, x_4' \geq 0) \end{cases}$$

<u>Bài 2.7</u>

$f(x) = 6x_1 + 8x_2 + 8x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge -7 \end{cases} \qquad x_1 \in R,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$$

<u>Giải :</u>

Đặt :

$x_1 = x_1' - x_1''\ (x_1', x_1'' \ge 0)$

$x_2' = -x_2\ (x_2' \ge 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = 6x_1' - 6x_1'' - 8x_2' + 8x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' - 4x_2' + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1' - x_1'' + x_2' + 2x_3 - x_5 = 6 \\ -x_1' + x_1'' + 2x_2' - x_3 + x_6 = 7 \end{cases} \qquad (x_1', x_1'', x_2', x_3, x_3', x_4, x_5, x_6 \ge 0)$$

<u>Bài 2.8</u> $f(x) = 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \ge 70 \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 \le 50 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 60 \end{cases} \qquad x_j \ge 0 ;\ j = \overline{1,3}$$

<u>Giải :</u>

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 70 \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_5 = 50 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_6 = 60 \end{cases} \qquad x_j \ge 0 ;\ j = \overline{1,6}$$

<u>Bài 2.9</u>

$f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \le 84 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 36 \end{cases} \qquad 0 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 7$$

<u>Giải</u> :

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + x_3 = 84 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases} \qquad x_j \ge 0 ;\ j = \overline{1,8}$$

$x_1 + x_7 = 6$

$x_2 + x_8 = 7$

Bài 2.10

$\mathbf{f(x) = 2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow max}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 2 \end{cases} \qquad x_j \ge 0 ;\ j = \overline{1,4}$$

Ta chuyển được về bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_6 = 2 \end{cases} \qquad x_j \ge 0 ;\ j = \overline{1,6}$$

Bài 2.11

$\mathbf{f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_4 \rightarrow min}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad x_1 \le 0 ;\ x_2 \in R,\ x_3 \ge 0$$

Giải :

Đặt :

$x_1' = -x_1\ (x_1' \ge 0)$

$x_2 = x_2' - x_2''\ (x_2', x_2'' \ge 0)$

$x_4 = x_4' - x_4''\ (x_4', x_4'' \ge 0)$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc :

$f(x) = -8x_1' + 7x_2' - 7x_2'' + 6x_4' - 6x_4'' \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1' + 2x_2' - 2x_2'' + x_3 = 2 \\ -2x_1' + x_2' - x_2'' + x_3 = 1 \end{cases} \qquad (x_1', x_2', x_2'', x_3, x_4', x_4'' \ge 0)$$

Bài 3 : Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp hình học

3.1 $f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 5x_1 - x_2 \le 15 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i=\overline{1,2}$.

$2x_1 + x_2=2(1)$

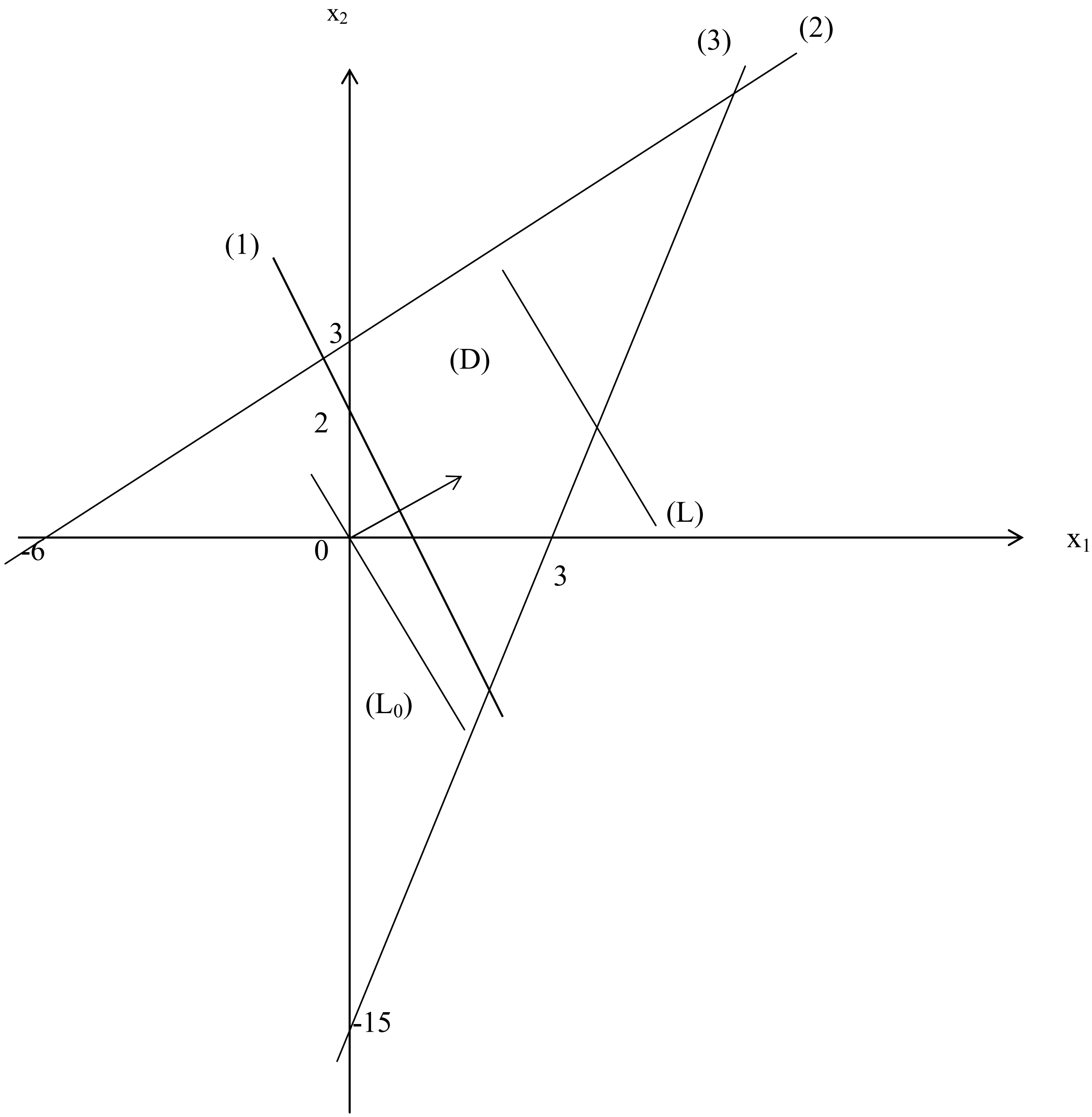
X_1	0	1
X_2	2	0

$-x_1+2x_2=6(2)$

X_1	0	-6
X_2	3	0

$5x_1-x_2=15(3)$

X_1	0	3
X_2	-15	0



$f(x)=2x_1+x_2 \rightarrow max$

$\vec{n}$ (2;1). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$ tại 0. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0, f→max

A=(2) ∩(3) →A(4;5)

Bài toán có phương án tối ưu với(4;5), f_{max}=13

<u>3.2</u> $f(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \geq 18 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2 \end{cases}$$

$6x_1+x_2=18(1)$

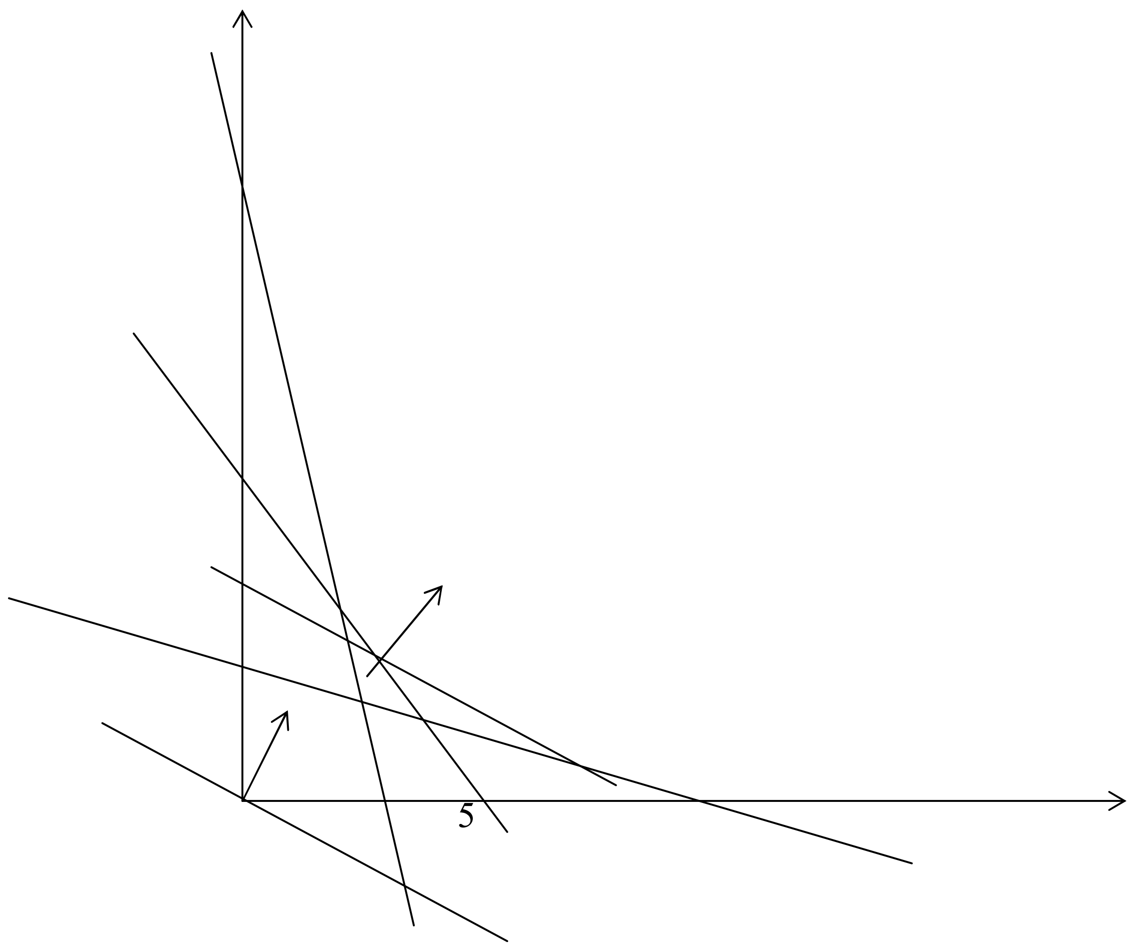
X_1	0	3
X_2	18	0

$x_1+4x_2=12(2)$

X_1	0	12
X_2	3	0

$2x_1+x_2=10(3)$

X_1	0	5
X_2	10	0



$f(x)=x_1+2x_2 \rightarrow min(max)$

$\vec{n}$ (1;2). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0

f→min, A=(1)∩(2)→A $(\frac{60}{23};\frac{54}{23})$. Phương án tối ưu với $(\frac{60}{23};\frac{54}{23})$.$f_{min}=\frac{168}{23}$

f→max,B=(3)∩(1)→B(2;6). Phương án tối ưu với (2;6),f_{max}=14

<u>3.3</u> $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \leq 0$

$2x_1 + x_2 = 5 (1)$

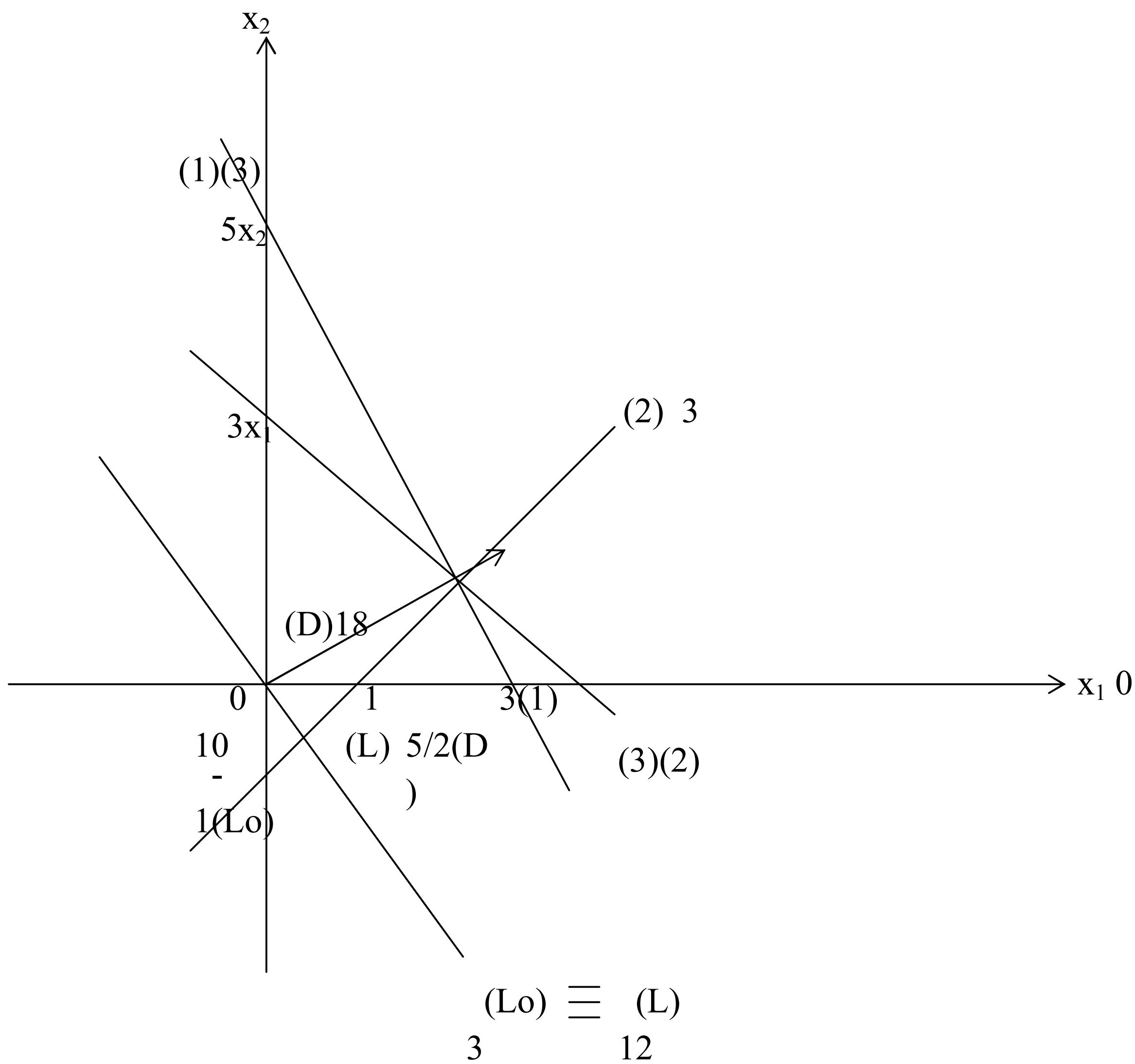
X_1	0	5/2
X_2	5	0

$x_1 - x_2 = 1 (2)$

X_1	0	1
X_2	-1	0

$x_1 + x_2 = 3 (3)$

X_1	0	3
X_2	3	0



$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$\vec{n}$ (3;2). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0 mà L_0 cũng ∈ D nên L ≡ L_0.
$f_{max} \rightarrow$ A=(2)∩(3),A(2;1). Phương án tối ưu với (2;1),f_{max}=8

<u>3.4</u> $f(x) = 2x+5x \rightarrow min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ \end{cases}$$

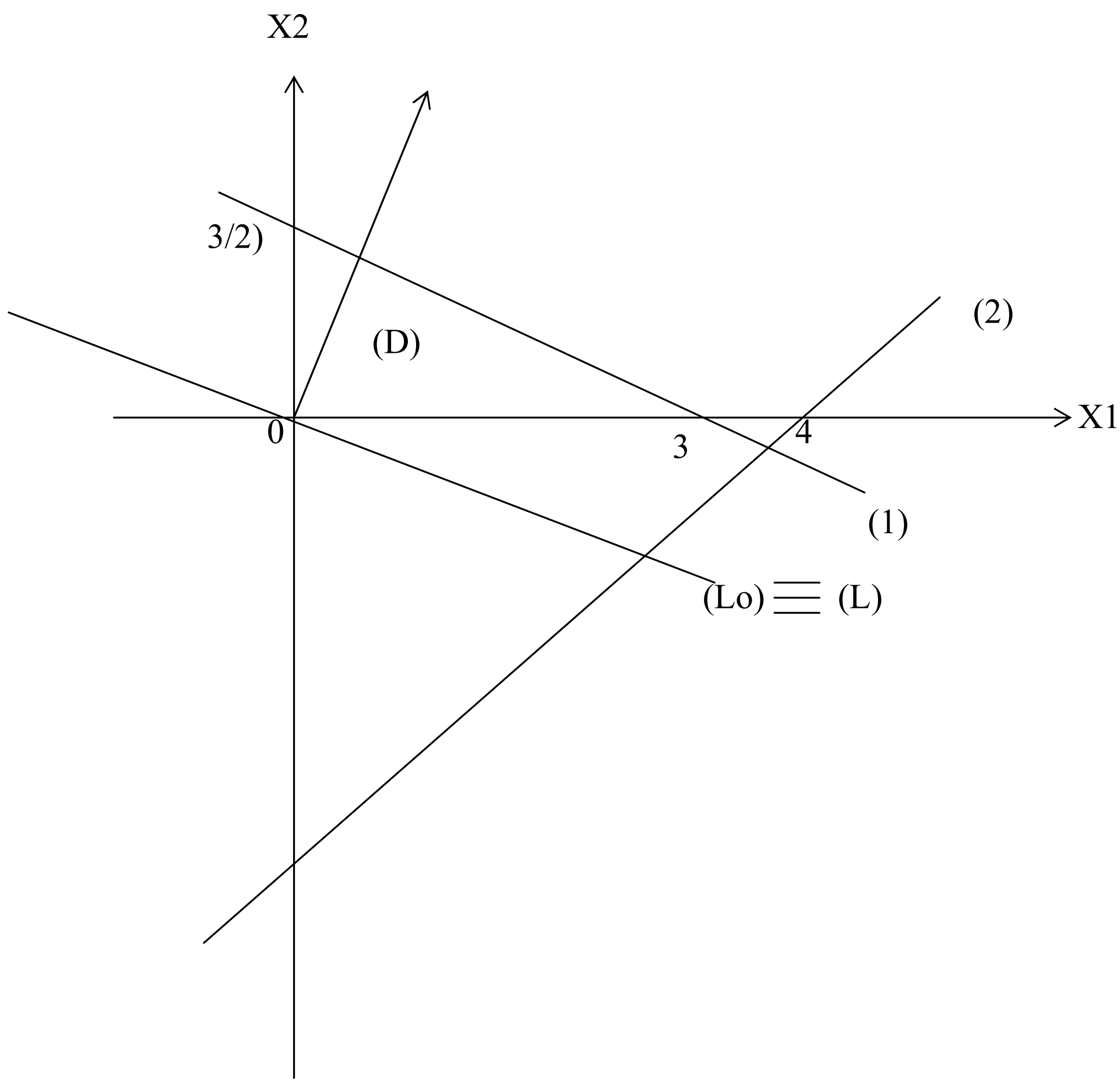
$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 = 3(1)$

X_1	0	3
X_2	3/2	0

$x_1 - x_2 = 4(2)$

X1	0	4
X_2	-4	0



$f(x) = 2x+5x \rightarrow \min$

$\vec{n}$ (3;5). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0 mà L_0 cũng ∈ D nên L ≡ L_0.
f_{min}→A≡ O. Phương án tối ưu với (0;0) f_{min}=0

3.5 f(x) = 4x+3x → max

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 - 2x_2 = 4(1)$

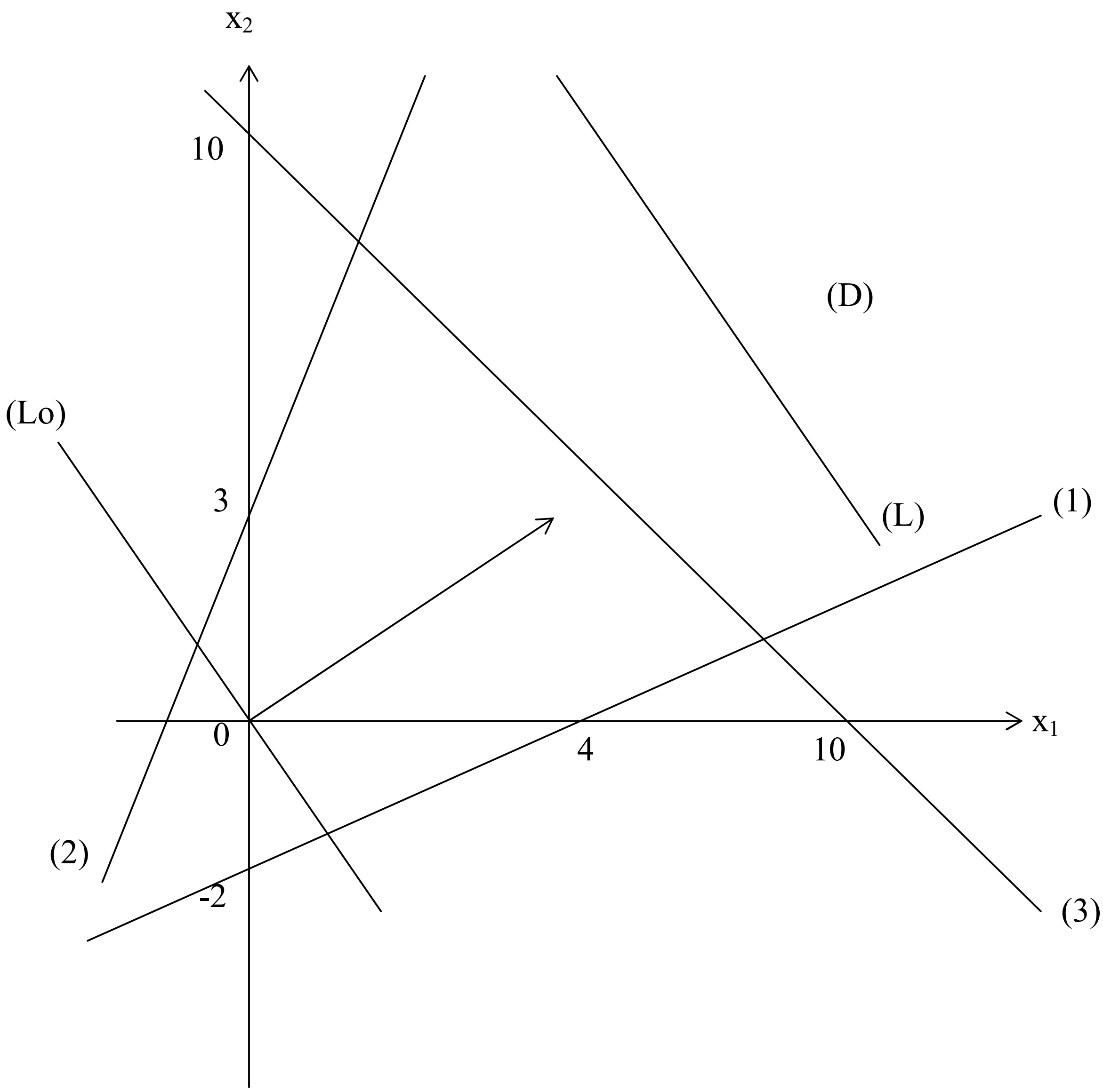
X_1	0	4
X_2	-2	0

$-2x_1 + x_2 = 3(2)$

X_1	0	-3/2
X_2	3	0

$x_1 + x_2 = 10(3)$

X_1	0	10
X_2	10	0



$f(x) = 4x+3x \rightarrow \max$

$\vec{n}$ (4;3). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0

$f \rightarrow +\infty$ bài toán không có phương án tối ưu.

<u>3.6</u> $f(x) = 3x+7x \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \geq 5 \\ 3x_1+x_2 \geq 4 \\ 4x_1+5x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$2x_1+4x_2 = 5(1)$

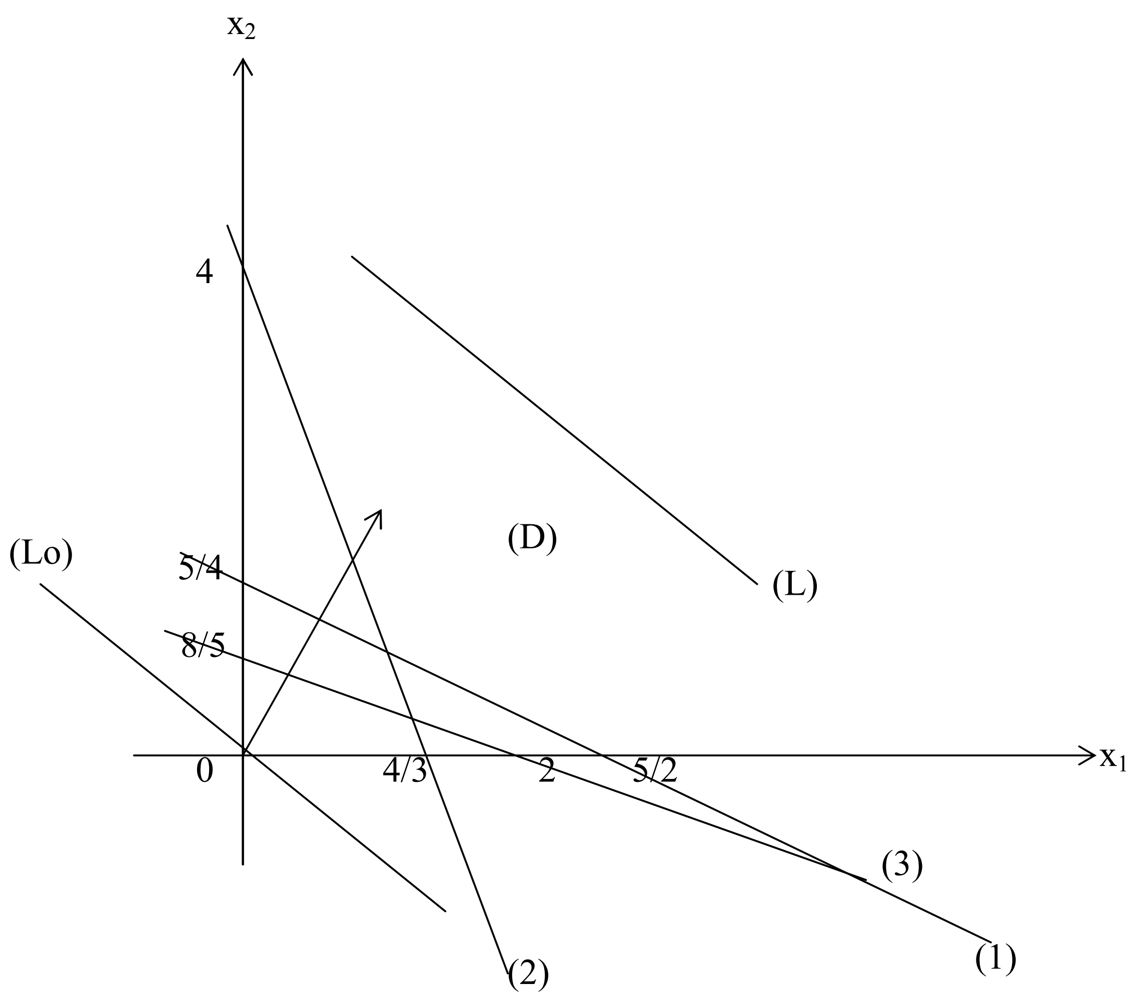
X_1	0	5/2
X_2	5/4	0

$3x_1+x_2 = 4(2)$

X_1	0	4/3
X_2	4	0

$4x_1+5x_2 = 8(3)$

X_1	0	2
X_2	8/5	0



$f(x) = 3x+7x \rightarrow$ min

$\vec{n}$ (3;7).). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm $\in$ D ta vẽ L // L_0 . $f_{min} \rightarrow A=(1)\cap(2)$

A ($\frac{11}{10}$;$\frac{7}{10}$).phương án tối ưu với ($\frac{11}{10}$;$\frac{7}{10}$), $f_{min}=\frac{41}{5}$

<u>**3.7.**</u> Gọi x_1,x_2 lần lượt số lượng máy bay loại A,B cần thuê.

$f(x)=10x_1+9x_2 \rightarrow$ min

$$\begin{cases} 200x_1+100x_2 \geq 1400 \\ 6x_1+15x_2 \geq 90 \\ 4 \leq x_1 \leq 9 \\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

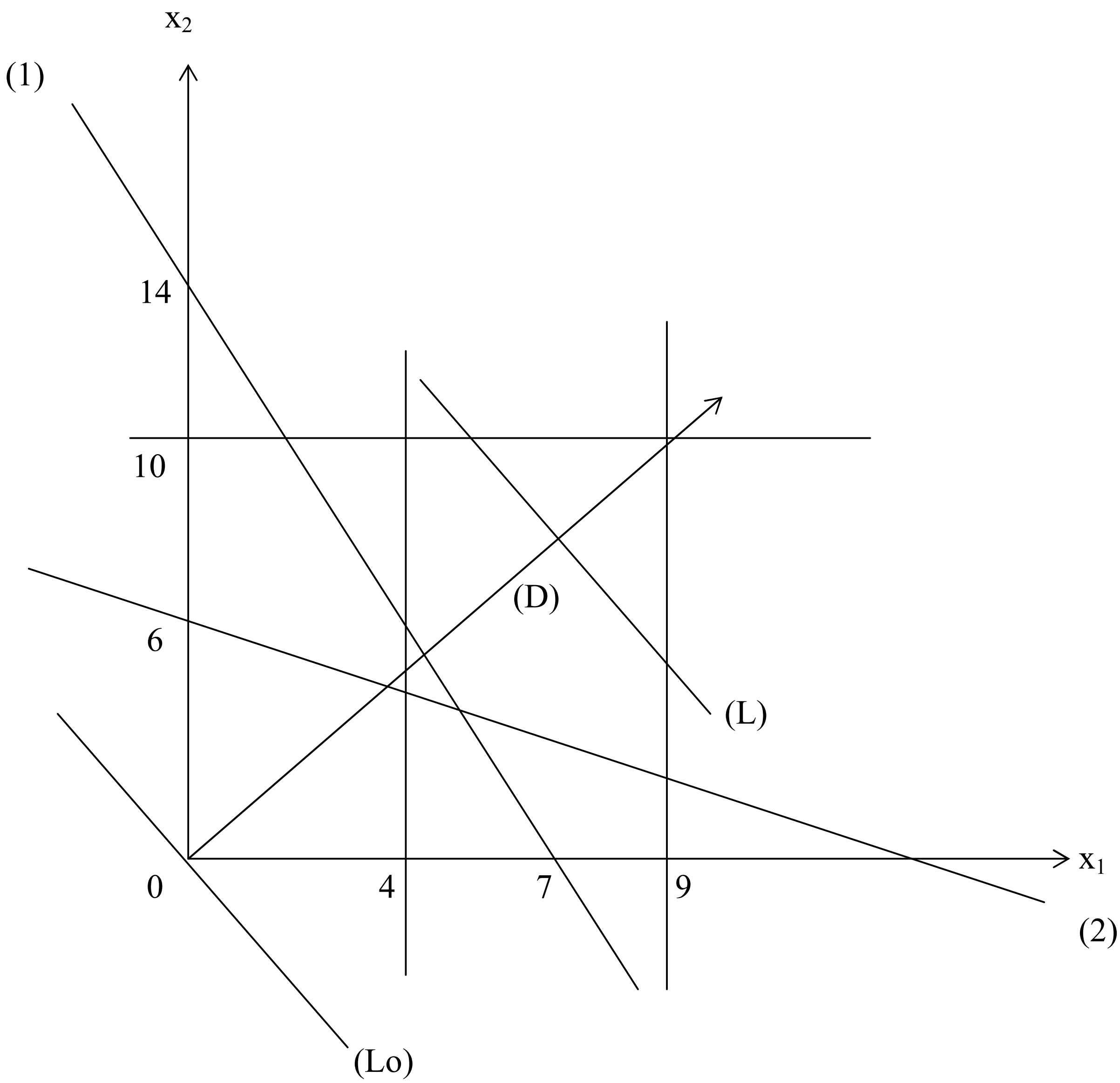
x_1, x_2 nguyên dương

$200x_1+100x_2 = 1400(1)$

X_1	0	7
X_2	14	0

$6x_1+15x_2 = 90(2)$

X_1	0	15
X_2	6	0



$f(x)=10x_1+9x_2 \rightarrow \min$

$\vec{n}$ (2;1).). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0 . f_{min}→A=(2)∩(1), A(5;4).phương án tối ưu với (5;4),f_{min}=86

<u>3.8</u> Gọi x_1,x_2 lần lượt là số sản phẩm loại I,II

$f(x)=4000x_1=3000x_2 \rightarrow max$

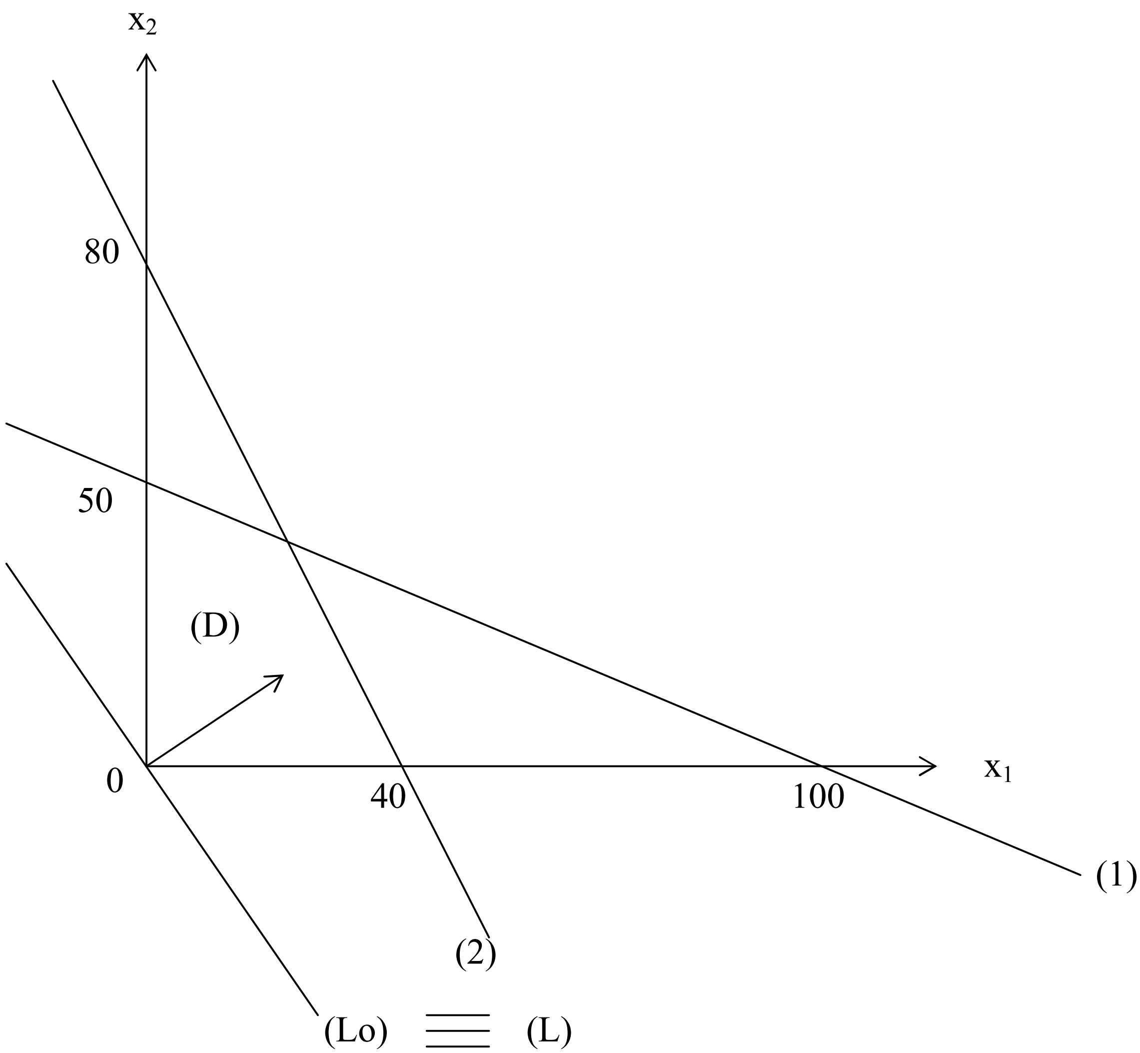
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 200 \\ 30x_1+15x_2 \le 1200 \\ X_1,x_2 \text{ nguyên dương} \end{cases}$$

$2x_1+4x_2 =200(1)$

X_1	0	100
X_2	50	0

$30x_1+15x_2 =1200(2)$

X_1	0	40
X_2	80	0



$f(x)=4000x_1=3000x_2 \rightarrow max$

$\vec{n}$ (4;3).). Vẽ L_0 vuông $\vec{n}$. Từ một điểm ∈ D ta vẽ L // L_0 mà L_0 cũng ∈ D nên L≡ L_0.
f→max →A=(1)∩(2),A(20;40). Phương án tối ưu với (20;40),f_{max}=200000

<u>Bài 4:</u> Chứng minh bài toán giải được, tìm phương án, phương án cực biên, phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

<u>4.1</u>. Cho bài toán

$f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

Chứng minh bài toán trên giải được.

<u>Giải:</u>

Dễ thấy $x_0 = (0;5;0;0)$ là một phương án do thỏa diều kiện:

$$\begin{cases} 0+2.5+0-3.0=10 \\ 0-5+0-0=-5\leq 6 \\ 2.0-5-3.0=-5\leq 8 \end{cases}$$

Mặc khác: $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \Rightarrow x_2 + (2x_1+3x_3) \leq 8 \Rightarrow x_2 \leq 8 \Rightarrow -2x_2 \geq -16$

$\Rightarrow f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq -16$ ($x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$)

Vậy f(x) bị chặn dưới.

Bài toán (min) giải được.

<u>4.2</u>. Cho bài toán

$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ \quad x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

Vectơ $x_0 = (6;0;10;0)$ có phải là phương án, phương án cực biên.

<u>Giải:</u>

Xét vectơ $x_o = (6,0,10,0)$ là phương án khi thỏa hệ ràng buộc của bài toán.

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 - 2.0 + 10 = 16$ (thỏa chặt)

$x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 - 4.10 + 0 = -40 < 8$ (thỏa lỏng)

$- x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 + 2.10 - 3.0 = 20$ (thỏa chặt)

$x_1 = 6 > 0$ (thỏa lỏng)

$x_2 = 0$ (thỏa chặt)

$x_3 = 10 > 0$ (thỏa lỏng)

$x_4 = 0$ (thỏa chặt)

Ta thấy các ràng buộc trên đều thỏa nên x_0 là phương án của bài toán. Trong đó có 4 ràng buộc thỏa chặt.

Ta chứng minh được 4 ràng buộc này độc lập tuyến tính vì:

Từ ràng buộc chung thứ 1 ta có vectơ $u_1 = (1;-2;1;0)$.

Từ ràng buộc chung thứ 2 ta có véctơ $u_2 = (0;1;-4;1)$.

Từ ràng buộc biến thứ 2 ta có vectơ $u_3 = (0;1;0;0)$.

Từ ràng buộc biến thứ 4 ta có vectơ $u_4 = (0;0;0;1)$.

Ta có: $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ -2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - 4k_2 = 0 \\ k_2 + k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

Vậy các vectơ này độc lập tuyến tính.

Vậy $x_0 = (6;0;10;0)$ là phương án cực biên.

Bài toán có 4 biến nên n=4. Số ràng buộc thỏa chặt độc lập tuyến tính bằng số tiền bằng 4. Vậy x_0 là phương án cực biên không suy biến.

<u>4.3</u>. Cho bài toán sau

f(x) = $x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow$ min

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq -2 \\ \quad x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 12 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0$; $x_3, x_4 \geq 0$.

a. **Chứng minh bài toán trên giải được.**
b. **Bài toán có phương án cực biên tối ưu không ? Vì sao.**

Giải:

a) Dễ thấy $x_0 = (0,0,0,0)$ là một phương án của bài toán $\Rightarrow$ bài toán có phương án.
Đặt: $x_1' = -x_1$; $x_2 = x_2' - x_2''$ (với $x_1', x_2', x_2'' \geq 0$)
⇨ $f(x) = x_1' + x_2' - x_2'' + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$
Các ràng buộc mới

$$\begin{cases} 3x_1' + x_2' - x_2'' + 3x_3 + x_4 \geq -2 \\ \quad x_2' - x_2'' - 2x_3 - x_4 \geq -7 \\ 2x_1' - x_2' + x_2'' + x_3 + x_4 \leq 12 \end{cases}$$

$x_1', x_2', x_2'', x_3, x_4 \geq 0$
Từ ràng buộc thứ nhất, ta có:
$3x_1' + x_2' - x_2'' + 3x_3 + x_4 \geq -2 \Rightarrow - x_2'' + (3x_1' + x_2' + 3x_3 + x_4) \geq -2 \Rightarrow - x_2'' \geq -2$
⇨ $f(x) = x_1' + x_2' - x_2'' + 3x_3 + 5x_4 \geq -2$ ($x_1', x_2', x_2'', x_3, x_4 \geq 0$)
Vậy f(x) bị chặn dưới.
Bài toán (min) giải được.

Bài 5: Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

5.1. $f(x) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 3x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ -\frac{3}{5}x_1 + x_5 + 2x_6 = 11 \\ x_3 + x_6 = 5 \\ \frac{3}{5}x_1 + x_2 - \frac{6}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$.

Giải:

Ta có bảng đơn hình

Hệ số	ACS	0 SHTD	2 x_1	10 x_2	4 x_3	8 x_4	8 x_5	3 x_6
8	x_4	5	**1**	0	0	1	0	0
8	x_5	11	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	1	2
4	x_3	5	0	0	1	0	0	1
10	x_2	4	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{6}{5}$
	f	188	$\mathbf{\frac{36}{5}}$	0	0	0	0	5

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,4,5,5,11,0) với f = 188

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = \frac{36}{5}$, $c_6 = 5$), ta chọn số dương $c_1 = \frac{36}{5}$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{5}{1} < \frac{4}{3/5}$). Biến đổi (2):=(2)+$\frac{3}{5}$(1); (3):=(3)+$\frac{3}{5}$(1); (5):=(5)+$\frac{36}{5}$(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	0	1	0	0
x_5	14	0	0	0	$\frac{3}{5}$	1	2
x_3	5	0	0	1	0	0	**1**
x_2	1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$
f	152	0	0	0	$-\frac{36}{5}$	0	**5**

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (5,1,5,0,14,0) với f = 152

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_6 = 5$), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{5}{1} < \frac{14}{2}$). Biến đổi (2):=(2)-2(3); (4):=(4)+$\frac{6}{5}$(3); (5):=(5)-5(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	0	1	0	0
x_5	4	0	0	-2	$\frac{3}{5}$	1	0

x_6	5	0	0	1	0	0	1
x_2	7	0	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	0
f	127	0	0	-5	$-\frac{36}{5}$	0	0

Hàng cuối gồm các phần tử nhỏ hơn hoặc bằng 0, nên phương án tối ưu của bài toán là (5,7,0,0,4,5), với $f_{min} = 127$.

5.2. $f(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$

Giải:

Đặt $g(x) = -f(x) = -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 5x_5 + 5x_6 \rightarrow min$

Ta có bảng đơn hình

Hệ số	ACS	0 SHTD	-2 x_1	-1 x_2	-2 x_3	-5 x_4	5 x_5	5 x_6
5	x_6	1	-2	-4	**1**	0	0	1
5	x_5	4	1	-4	1	0	1	0
-5	x_4	4	-1	-3	1	1	0	0
	g	5	2	-24	**7**	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,4,4,1) với g = 5

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = 2$, $c_3 = 7$), ta chọn số dương $c_3 = 7$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{1}{1} < \frac{4}{1}$). Biến đổi (2):=(2)-(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-7(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

x_3	1	-2	-4	1	0	0	1
x_5	3	**3**	0	0	0	1	-1
x_4	3	1	1	0	1	0	-1
g	-2	**16**	4	0	0	0	-7

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,1,3,3,0) với g = -2

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = 16$, $c_2 = 4$), ta chọn số dương $c_1 = 16$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{3}{3} < \frac{3}{1}$). Biến đổi (2):=$\frac{1}{3}$(2); (1):=(1)+2(2); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-16(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	3	0	-4	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_4	2	0	**1**	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
g	-18	0	**4**	0	0	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,0,3,2,0,0) với g = -18

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_2 = 4$), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (1):=(1)+4(3); (5):=(5)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	11	0	0	1	4	$-\frac{2}{3}$	-1
x_1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	2	0	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
g	-26	0	0	0	-4	-4	**1**

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,2,11,0,0,0) với g = -26

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_6 = 1$), trên cột này các số hạng đều âm. Bài toán g_{min} không có phương án tối ưu ⇒ Bài toán f_{max} cũng không có phương án tối ưu.

5.3. $f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow min$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_5 - x_6 + x_7 = 40 \\ -\ 2x_2 + x_3 - x_5 + 3x_6 - x_7 = 10 \\ -\ \frac{1}{2}x_2 + x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 = 60 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

Giải:

Ta có bảng đơn hình

Hệ số	ACS	0 SHTD	1 x_1	1 x_2	-2 x_3	3 x_4	4 x_5	1 x_6	0 x_7
1	x_1	40	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	2	-1	**1**
-2	x_3	10	0	-2	1	0	-1	3	-1
3	x_4	60	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	2	1
	f	200	0	0	0	0	3	-2	**6**

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (40,0,10,60,0,0,0) với f = 200

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_5 = 3$, $c_7 = 6$), ta chọn số dương $c_7 = 6$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{40}{1} < \frac{60}{1}$). Biến đổi (2):=(2)+(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-6(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	40	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	2	-1	1
x_3	50	1	$-\frac{7}{2}$	1	0	1	2	0
x_4	20	-1	**1**	0	1	-1	3	0

f	-40	-6	**9**	0	0	-9	4	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,50,20,0,0,40) với f = -40

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_2 = 9$, $c_6 = 4$), ta chọn số dương $c_2 = 9$ trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (1):=(1)+$\frac{3}{2}$(3); (2):=(2)+$\frac{7}{2}$(3); (4):=(4)-9(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_7	70	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1
x_3	120	$-\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$	0
x_2	20	-1	1	0	1	-1	3	0
f	-220	**3**	0	0	-9	0	-23	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,20,120,0,0,0,70) với f = -220

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_1 = 3$), trên cột này các số hạng đều âm. Vậy bài toán không có phương án tối ưu.

<u>5.4</u>. $f(x) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$.

<u>Giải:</u>

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ba ẩn giả x_5, x_6, x_7 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: $f(\overline{x)} = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 18 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	1 x_1	2 x_2	-4 x_3	3 x_4
M	x_5	4	2	-1	1	**1**
M	x_6	18	-6	3	3	2
M	x_7	10	-1	1	-1	1
	$\overline{f}$	0	-1	-2	4	-3
		32	-5	3	3	**4**

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,4,18,10) với $\overline{f}$ = 32M

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_2 = 3M-2, c_3 = 3M+4, c_4 = 4M-3), ta chọn số dương c_4 = 4M-3 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{4}{1} < \frac{18}{2} < \frac{10}{1}$). Biến đổi (2):=(2)-2(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)+3(1), (5):=(5)-4(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	4	2	-1	1	1
x_6	10	-10	**5**	1	0
x_7	6	-3	2	-2	0
$\overline{f}$	12	5	-5	7	0
	16	-13	**7**	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,4,0,10,6) với $\overline{f}$ = 16M+12

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_2 = 7M-5), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{10}{5} < \frac{6}{2}$). Biến đổi (2):=$\frac{1}{5}$(2); (1):=(1)+(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)+5(2); (5):=(5)-7(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	6	0	0	$\frac{6}{5}$	1
x_2	2	-2	1	$\frac{1}{5}$	0
x_7	2	1	0	$-\frac{12}{5}$	0
$\overline{f}$	22	-5	0	8	0

	2	1	0	$-\frac{12}{5}$	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,6,0, 0,2) với $\overline{f}$ = 2M+22

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_1 = M-15), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (2):=(2)+2(3); (4):=(4)+15(3); (5):=(5)-(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	6	0	0	$\frac{6}{5}$	1
x_2	6	0	1	$-\frac{23}{5}$	0
x_7	2	1	0	$-\frac{12}{5}$	0
$\overline{f}$	32	0	0	-4	0
	0	0	0	0	0

Hàng cuối gồm các phần tử nhỏ hơn hoặc bằng 0, nên phương án tối ưu của bài toán là (2,6,0,6), với f_{min} = 32.

<u>5.5</u>.

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 4x_6 + 3x_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 = 26 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 20 \\ -x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 = 16 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

<u>Giải:</u>

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm hai ẩn giả x_8, x_9 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: $\overline{f}(x) = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 4x_6 + 3x_7 + Mx_8 + Mx_9 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 + x_8 = 26 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 20 \end{cases}$$

$-x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 1$

- $2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 + x_9 = 16$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,9}$.

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số		0	2	-3	-2	1	-1	-4	3
	ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
M	x_8	26	0	-2	1	1	0	1	-2
2	x_1	20	1	-3	1	3	0	1	-4
-1	x_5	1	0	0	-1	0	1	1	5
M	x_9	16	0	-2	**2**	1	0	0	-4
	$\overline{f}$	39	0	-3	5	5	0	5	-16
		42	0	-4	**3**	2	0	1	-6

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (20,0,0,0,1,0, 0,26,16) với $\overline{f}$ = 42M+39

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_3 = 3M+5, c_3 = 2M+5, c_4 = M+5), ta chọn số dương c_3 = 3M+5 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{16}{2} < \frac{20}{1} < \frac{26}{1}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{2}$(4); (1):=(1)-(4); (2):=(2)-(4); (3):=(3)+(4); (5):=(5)-5(4); (6):=(6)-3(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_8	18	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0
x_1	12	1	-2	0	$\frac{5}{2}$	0	1	-2
x_5	9	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	**1**	3
x_3	8	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	-2
$\overline{f}$	-1	0	2	0	$\frac{5}{2}$	0	5	-6
	18	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	**1**	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (12,0,8,0,9,0, 0,18,0) với $\overline{f}$ = 18M-1

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_4 = \frac{1}{2}M+\frac{1}{2}$, $c_6 = M+5$), ta chọn số dương $c_6 = M+5$ trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{9}{1} < \frac{12}{1} < \frac{18}{1}$). Biến đổi (1):=(1)-(3); (2):=(2)-(3); (5):=(5)-5(3); (6):=(6)-(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_8	9	0	0	0	0	-1	0	-3
x_1	3	1	-1	0	2	-1	0	-5
x_6	9	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	3
x_3	8	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	-2
$\overline{f}$	-46	0	7	0	0	-5	5	-21
	9	0	0	0	0	-1	0	-3

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (3,0,8,0,0,9,0,9,0) với $\overline{f}$ = 9M-46

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 $\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (3,0,8,0,0,9,0,9,0).

Ta thấy ẩn giả $x_8=9 \neq 0$. Vậy bài toán ban đầu không có phương án tối ưu.

<u>5.6</u>. $f(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 + x_7 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 = 6 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 3 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 = 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

<u>Giải:</u>

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm hai ẩn giả x_8, x_9 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: $\overline{f}(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 + x_7 + Mx_8 + Mx_9 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 3 \end{cases}$$

$-2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 + x_9 = 12$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,9}.$

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số		0	2	-1	-2	-2	1	-4	1
	ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
M	x_8	6	0	-1	**1**	1	0	1	-2
2	x_1	10	1	0	1	3	0	1	-4
1	x_5	3	0	2	-1	0	1	1	5
M	x_9	12	0	-2	2	1	0	0	-4
	$\overline{f}$	23	0	3	3	8	0	7	-4
		18	0	-3	**3**	2	0	1	-6

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (10,0,0,0,3,0, 0,6,12) với $\overline{f}$ = 18M+23

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_3 = 3M+5, c_4 = 2M+8, c_6 = M+7), ta chọn số dương c_3 = 3M+5 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{6}{1} < \frac{10}{1}$). Biến đổi (2):=(2)-(1); (3):=(3)+(1); (4):=(4)-2(1); (5):=(5)-3(1); (6):=(6)-3(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	6	0	-1	1	1	0	1	-2
x_1	4	1	**1**	0	2	0	0	-2
x_5	9	0	1	0	1	1	2	3
x_9	0	0	0	0	-1	0	-2	0
$\overline{f}$	5	0	**6**	0	5	0	4	2
	0	0	0	0	-1	0	-2	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (4,0,6,0,9,0, 0,0,0) với $\overline{f} = 5$

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_2 = 6, c_7 = 2), ta chọn số dương c_2 = 6 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{4}{1} < \frac{9}{1}$). Biến đổi (1):=(1)+(2); (3):=(3)-(2); (5):=(5)-6(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	10	1	0	1	3	0	1	-4
x_2	4	1	1	0	2	0	0	-2
x_5	5	-1	0	0	-1	1	2	**5**
x_9	0	0	0	0	-1	0	-2	0
$\overline{f}$	-19	-6	0	0	-7	0	4	**14**
	0	0	0	0	-1	0	-2	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,4,10,0,5,0, 0,0,0) với $\overline{f}$ = -19

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_7 = 14), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (3):=$\frac{1}{5}$(3); (1):=(1)+4(3); (2):=(2)+2(3); (5):=(5)-14(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_3	14	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{11}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{13}{5}$	0
x_2	6	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
x_7	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
x_9	0	0	0	0	-1	0	-2	0
$\overline{f}$	-33	$-\frac{16}{5}$	0	0	$-\frac{21}{5}$	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0
	0	0	0	0	-1	0	-2	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,6,14,0,0,0,1,0,0) với $\overline{f}$ = -33

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (3,0,8,0,0,9,0,9,0). Ta thấy các ẩn giả đều bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (0,6,14,0,0,0,1) với f(x) = -33.

5.7. $f(x) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 + x_5 = 21 \\ x_3 + x_6 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$.

Giải :

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_7 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M) tương ứng: $\overline{f}(x) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 + x_5 = 21 \\ x_3 + x_6 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_7 = 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số	ACS	0 SHTD	2 x_1	5 x_2	-1 x_3	3 x_4	5 x_5	1 x_6
3	x_4	5	1	0	0	1	0	0

5	x_5	21	0	1	$-\frac{4}{5}$	0	1	0
1	x_6	10	0	0	**1**	0	0	1
M	x_7	90	3	5	6	0	0	0
	$\overline{f}$	130	1	0	-2	0	0	0
		90	3	5	**6**	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,5,21,10,90) với $\overline{f}$ = 90M+130

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_1 = 3M+1, c_2 = 5M, c_3 = 6M-2), ta chọn số dương c_3 = 6M-2 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{10}{1} < \frac{90}{6}$). Biến đổi (2):=(2)+$\frac{4}{5}$(3); (4):=(4)-6(3); (5):=(5)+2(3); (6):=(6)-6(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	1	0	0	1	0	0
x_5	29	0	1	0	0	1	$\frac{4}{5}$
x_3	10	0	0	1	0	0	1
x_7	30	3	**5**	0	0	0	-6
$\overline{f}$	150	1	0	0	0	0	2
	30	3	**5**	0	0	0	-6

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,5,29, 0,30) với $\overline{f}$ = 30M+150

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_1 = 3M+1, c_2 = 5M), ta chọn số dương c_2 = 5M trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{30}{5} < \frac{29}{1}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{5}$(4); (2):=(2)-(4); (6):=(6)-5(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	1	0	0	1	0	0
x_5	23	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	1	2
x_3	10	0	0	1	0	0	**1**
x_2	6	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{6}{5}$
$\overline{f}$	150	1	0	0	0	0	**2**
	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,5,23, 0,6) với $\overline{f}$ = 150

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_1 = 1, c_6 = 2), ta chọn số dương c_6 = 2 trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{10}{1} < \frac{23}{2}$). Biến đổi (2):=(2)-2(3); (4):=(4)+$\frac{6}{5}$(3); (5):=(5)-2(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	**1**	0	0	1	0	0

x_5	3	$-\frac{3}{5}$	0	-2	0	1	0
x_6	10	0	0	1	0	0	1
x_2	18	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	0	0
$\overline{f}$	130	**1**	0	-2	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,5,3,10,18) với $\overline{f}$ = 130

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_1 = 1$), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{5}{1} < \frac{18}{3/5}$). Biến đổi (2):=(2)+$\frac{3}{5}$(1); (4):=(4)-$\frac{3}{5}$(1); (5):=(5)-(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	0	1	0	0
x_5	6	0	0	-2	$\frac{3}{5}$	1	0
x_6	10	0	0	1	0	0	1
x_2	15	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	0
$\overline{f}$	125	0	0	-2	-1	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (5,15,0,0,6,10,0) với $\overline{f}$ = 125

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 $\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (5,15,0,0,6,10,0).

Ta thấy ẩn giả $x_7 = 0$ nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (5,15,0,0,6,10) với f(x) = 125.

Bài 6: Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

Bài 6.1: $f(x) = -4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge -60 \\ -x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \le 12 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$; $j = \overline{1,3}$.

Giải:

Đặt $g(x) = -f(x) = 4x_1 - 3x_2 - x_3 \to \min$

Bài toán dạng chính tắc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 60 \end{cases}$$

$-x_1 + \quad x_2 \qquad + x_6 = \quad 8$

$x_1 \ - 3x_2 - \ x_3 \ + x_7 = \ 12$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	10	1	-1	3	1	0	0	0
x_5	60	-1	2	-2	0	1	0	0
x_6	8	-1	**1**	0	0	0	1	0
x_7	12	1	-3	-1	0	0	0	1
g(x)	0	-4	**3**	1	0	0	0	0

Hàng cuối có 2 số dương, ta chọn $c_2 = 3$. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 3 (vì $\frac{60}{2} > \frac{8}{1}$). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=(1)+(3); (2):=(2) –2(3); (4):=(4) +3(3); (5):=(5)–3(3). Ta được bảng đơn hình thứ 2:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	18	0	0	**3**	1	0	1	0
x_5	44	1	0	-2	0	1	-2	0
x_2	8	-1	1	0	0	0	1	0
x_7	36	-2	0	-1	0	0	3	1
g(x)	-24	-1	0	**1**	0	0	-3	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,8,0) với g(x) = -24

Hàng cuối có 1 số dương. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ nhất. Thực hiện các phép biến đổi: (1):= $\frac{1}{3}$(1); (2):=(2)+2(1); (4):=(4)+(1); (5):=(5)–(1). Ta được bảng đơn hình thứ 3:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	6	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_5	56	1	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0
x_2	8	-1	1	0	0	0	1	0
x_7	42	-2	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	1
g(x)	-30	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,8,6) với g(x) = -30

Ta thấy hàng cuối đều không dương nên phương án tối ưu là (0,8,6) với $f(x)_{max} = -g(x)_{min} = 30$

Bài 6.2

$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow max$

$2x_1 + \ x_2 - x_3 \ - 2x_4 \leq 19$

$\mathbf{2x_2 - 6x_3 + 3x_4 \le 12}$

$\mathbf{x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \le 17}$

$\mathbf{4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8}$

$\mathbf{x_j \ge 0 ; j = \overline{1,4}.}$

Giải:

Đặt $g(x) = -f(x) = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$

Bài toán dạng chính tắc:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 19 \\ 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_6 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_7 = 17 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_8 = 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 ; j = \overline{1,8}$

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_5	19	2	1	-1	-2	1	0	0	0
x_6	12	0	2	-6	3	0	1	0	0
x_7	17	1	3	0	1	0	0	1	0
x_8	8	4	**2**	2	1	0	0	0	1
g(x)	0	2	**4**	1	3	0	0	0	0

Ta thấy hàng cuối có 4 số dương ta chọn $c_2 = 4$. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 4 (vì $\frac{8}{2} < \frac{17}{3} < \frac{12}{2} < \frac{19}{1}$). Thực hiện các phép biến đổi: (4):= $\frac{1}{2}$(4); (1):=(1)–(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)–3(4); (5):=(5)–2(4). Ta được bảng đơn hình thứ 2:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_5	15	0	0	-2	$-\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_6	4	-4	0	-8	**2**	0	8	0	-1
x_7	5	-5	0	-3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$
x_2	4	2	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
g(x)	-16	-6	0	-3	**1**	0	0	0	-2

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,4,0,0) với g(x) = -16

Hàng cuối cùng có 1 số dương, ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 2 (vì $\frac{4}{2} < \frac{4}{1/2}$). Thực hiện các phép biến đổi: (2):=$\frac{1}{2}$(2); (1):=(1)+$\frac{5}{2}$(2); (3):=(3)+$\frac{1}{2}$(2); (4):=(4)-$\frac{1}{2}$(2); (5):=(5)–(2). Ta được bảng đơn hình thứ 3:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_5	20	-5	0	-12	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{7}{4}$
x_4	2	-2	0	-4	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_7	6	-6	0	-5	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
x_2	3	3	1	**3**	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
g(x)	-18	-4	0	**1**	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

Bảng đơn hình cho ta phương cán cực biên là (0,3,0,2) với g(x) = -18

Hàng cuối có 1 số dương. Trên cột này ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ 4. Thực hiện các phép biến đổi: (4):=$\frac{1}{3}$(4); (1):=(1)+12(4); (2):=(2)+4(4); (3):=(3)+5(4); (5):=(5)–(4). Ta được bảng đơn hình thứ 4:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_5	32	7	4	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$
x_4	6	2	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
x_7	11	-1	$\frac{5}{3}$	0	0	0	$-\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{8}$
x_3	1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{7}{60}$	0	$-\frac{7}{4}$
g(x)	-19	-5	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{7}{60}$	0	$-\frac{7}{4}$

Bảng đơn hình cho ta phương cán cực biên là (0,0,1,6) với g(x) = -19

Hàng cuối cùng không có số dương nên phương án tối ưu của bài toán là (0,0,1,6).

Với $g(x)_{min} = -19 \rightarrow f(x)_{max} = 19$

<u>Bài 6.3:</u> $f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$.

<u>Giải:</u>

Ta chuyển bài toán về dạng chính tắc:

$f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_7 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}$

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	10	1	**2**	1	-3	1	0	0
x_6	6	1	-1	1	-1	0	1	0
x_7	8	2	1	3	0	0	0	1
f(x)	0	-4	**2**	-3	-3	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0; 0; 0;0;10; 6; 8) với f(x)=0

Hàng cuối có 1 số dương c_2=2, trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng thứ 1 (vì $\frac{10}{2} > \frac{8}{1}$). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=$\frac{1}{2}$(1); (2):=(2)+(1); (3):=(3)-(1); (4):=(4)-2(1). Ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_6	11	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
x_7	3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
f(x)	-10	-5	0	-4	0	-1	0	0

Các số hạng hàng cuối đều không dương nên bài toán đã cho có phương án tối ưu là (0,5,0,0,0) với $f(x)_{min}$ = -10

<u>Bài 6.4:</u> $f(x) = 2x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + \quad + x_4 \leq 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \forall j \neq 3;\ x_3 \leq 0$

Giải:

Đặt $g(x) = -f(x) = -2x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 \rightarrow \min$

Đặt $x_3' = -x_3$ ($x_3' \geq 0$)

Ta có bài toán dạng chính tắc:

$g(x) = -2x_1 + x_2 - x_3' - 6x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3' + x_4 + x_5 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_6 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \forall j \neq 3;\ x_3' \geq 0$

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	9	1	2	4	1	1	0	0
x_6	4	-3	2	-1	0	0	1	0
x_7	1	5	3	0	**1**	0	0	1
g	0	2	-1	1	**6**	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (0,0,0,0,9,4,1) với g(x) = 0

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương $c_4 = 6$ lớn nhất; trên cột này có 2 số dương, ta chọn số dương hàng 3 làm phần tử trục xoay (vì $\frac{1}{1} < \frac{9}{1}$). Thực hiện các phép biến đổi: (1):=(1)-(3); (4):=(4)-6(3). Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	8	-4	-1	**4**	0	1	0	-1
x_6	4	-3	2	-1	0	0	1	0
x_4	1	5	3	0	1	0	0	1
g	-6	-28	-19	**1**	0	0	0	-6

Hàng cuối có 1 số hạng dương $c_3' = 1$, trên cột này có 1 số dương ở hàng thứ nhất, chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (1):= $\frac{1}{4}$(1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)-(1). Ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3'	2	-1	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$

x_6	6	-4	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$
x_4	1	5	3	0	1	0	0	1
g	-8	-27	$-\frac{75}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{23}{4}$

Hàng cuối các số đều không dương nên bài toán có phương án tối ưu là (0,0,2,1,0,0,0) với $g(x)_{min}$= -8. Vậy bài toán ban đầu có phương án tối ưu là (0,0,-2,1), (x'3 = -x3 ⇒ x3 = -2) với $f(x)_{max} = -g(x)_{min}$ = 8.

Bài 6.5: **$f(x) = x_1 – 3x_2 + 2x_3 – 7x_4 \rightarrow \min$**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \le 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 \le 9 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$; $j = \overline{1,4}$.

Giải :

Đưa về bài toán dạng chính tắc:

$f(x) = x_1 – 3x_2 + 2x_3 – 7x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_7 = 9 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$; $j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	1 x_1	-3 x_2	2 x_3	-7 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_5	7	-1	2	0	**3**	1	0	0
2	x_3	8	2	-3	1	-1	0	1	0
0	x_7	9	1	-1	0	1	0	0	1
	f(x)	16	3	-3	0	**5**	0	2	0

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_1=3; c_4=5), ta chọn số dương lớn hơn (c_4=5>c_1=3). Trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng 1 (vì $\frac{7}{3} < \frac{9}{1}$). Thực hiện phép biến đổi: (1):=$\frac{1}{3}$(1); (2):=(2)+(1); (3):=(3)–(1); (4):=(4)–5(1). Ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_4	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0
x_3	$\frac{31}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	1	0
x_7	$\frac{20}{3}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1
f(x)	$\frac{13}{3}$	$\mathbf{\frac{14}{3}}$	$-\frac{19}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	2	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là $(0,0,\frac{31}{3},\frac{7}{3},0,0,\frac{20}{3})$ với $f(x) = \frac{13}{3}$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1=\mathbf{\frac{14}{3}}$, $c_6=2$), chon số dương lớn hơn (c1=$\mathbf{\frac{14}{3}}$**)**. Trên cột này có 2 số dương, chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng 3 (vì $\frac{20/3}{4/3} < \frac{31/3}{5/3}$). Thực hiện các phép biến đổi: (3):= $\frac{3}{4}$(3); (2):=(2)-$\frac{5}{3}$(3); (4):=(4)-$\frac{14}{3}$(3). Ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_3	2	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	**1**	$-\frac{5}{4}$
x_1	5	1	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
f(x)	-19	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	**2**	$-\frac{7}{2}$

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên là (5,0,2,4,0,0,0) với f(x) = -19

Hàng cuối có một số dương (c_6=2). Trên cột này có 1 một số dương ở hàng thứ hai, chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện phép biến đổi: (4):=(4)–2(2). Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_6	2	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$
x_1	5	1	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
f(x)	-23	0	0	-1	0	-2	0	-1

Hàng cuối đều là số không dương nên phương án tối ưu của bài toán gốc là (5,0,0,4) với $f(x)_{min}$ = -23.

<u>Bài 7:</u> Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

<u>7.1</u>. $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \end{cases}$$

$\mathbf{4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23}$

$\mathbf{x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.}$

<u>Giải :</u>

Đặt $g(x) = -f(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \min$

Thêm ẩn bù x_5 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ hai và x_6 vào ràng buộc thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

$g(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 23 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_7 vào ràng buộc thứ hai để được bài toán (M) tương ứng: $g(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_7 = 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 23 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.$

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	-2 x_1	-1 x_2	-1 x_3	-4 x_4	0 x_5	0 x_6
-1	x_2	50	5	1	1	6	0	0
M	x_7	16	-3	0	1	**2**	-1	0
0	x_6	23	4	0	3	1	0	1
	$\overline{g}$	-50	-3	0	0	-2	0	0
		16	-3	0	1	**2**	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,50,0,0,0,23,16) với $\overline{g} = 16M-50$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_3 = M$, $c_4 = 2M-2$), ta chọn số dương $c_4 = 2M-2$ trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{16}{2} < \frac{50}{6} < \frac{23}{1}$). Biến đổi (2):=$\frac{1}{2}$(2); (1):=(1)-6(2); (3):=(3)-(2); (4):=(4)+2(2); (5):=(5)-2(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

x_2	2	14	1	-2	0	3	0
x_4	8	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_6	15	$\frac{11}{2}$	0	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\overline{g}$	-34	-6	0	**1**	0	-1	0
	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,8,0,15,0) với $\overline{g}$ = -34

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_3 = 1), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{15}{5/2} < \frac{8}{1/2}$). Biến đổi (3):=$\frac{2}{5}$(3); (1):=(1)+2(3); (2):=(2)-$\frac{1}{2}$(3); (4):=(4)-(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	14	$\frac{92}{5}$	1	0	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_4	5	$-\frac{13}{5}$	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_3	6	$\frac{11}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{g}$	-40	$-\frac{41}{5}$	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,14,6,5,0,0,0) với $\overline{g}$ = -40

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 $\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (0,14,6,5,0,0,0).

Ta thấy ẩn giả x_7 bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (0,14,6,5) với $f_{max} = -g_{min} = 40$.

<u>7.2</u>. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 \geq 64 \\ -\frac{5}{2}x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 \leq 27 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$.

<u>Giải:</u>

Thêm ẩn bù x_6 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ nhất và x_7, x_8 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min$

$2x1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 - x_6 = 64$

$-\frac{5}{2}x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 + x_7 = 20$

$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_8 = 27$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 24$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,8}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_9 vào ràng buộc thứ nhất để được bài toán dạng (M) tương ứng: $\overline{f}(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 + Mx_9 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 - x_6 + x_9 = 64 \\ -\frac{5}{2}x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 + x_7 = 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_8 = 27 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,9}.$

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	1 x_1	2 x_2	1 x_3	4 x_4	-1 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8
M	x_9	64	2	2	0	4	-2	-1	0	0
0	x_7	20	$-\frac{5}{2}$	1	0	-2	3	0	1	0
0	x_8	27	1	-1	0	1	2	0	0	1
1	x_3	24	2	-3	1	**2**	1	0	0	0
	$\overline{f}$	24	1	-5	0	-2	2	0	0	0
		64	2	2	0	**4**	-2	-1	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,24,0,0,0,20,27,64) với $\overline{f}$= 64M+24

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_1 = 2M+1, c_2 = 2M-5, c_4 = 4M-2), ta chọn số dương c_4 = 4M-2 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{24}{2} < \frac{64}{4} < \frac{27}{1}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{2}$(4); (1):=(1)-4(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)-(4); (5):=(5)+(4); (6):=(6)-4(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	16	-2	**8**	-2	0	-4	-1	0	0
x_7	44	$-\frac{1}{2}$	-2	1	0	4	0	1	0
x_8	15	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	1

x_4	12	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\overline{f}$	48	3	-8	1	0	3	0	0	0
	16	-2	**8**	-2	0	-4	-1	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,12,0,0,44,15,16) với $\overline{f}$= 16M+48

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_2 = 8M-8), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1(vì $\frac{16}{8} < \frac{15}{1/2}$). Biến đổi (1):=$\frac{1}{8}$(1); (2):=(2)+2(1); (3):=(3)-$\frac{1}{2}$(1); (4):=(4)+$\frac{3}{2}$(1); (5):=(5)+8(1); (6):=(6)-8(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	0
x_7	48	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{4}$	1	0
x_8	14	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	1
x_4	15	$\boldsymbol{\frac{5}{8}}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	0	0
$\overline{f}$	64	**1**	0	-1	0	-1	-1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,2,0,15,0,0,48,14,0) với $\overline{f}$= 64

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_1 = 1), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4(vì $\frac{15}{5/8} < \frac{14}{1/8}$). Biến đổi (4):=$\frac{8}{5}$(4); (1):=(1)+$\frac{1}{4}$(4); (2):=(2)+(4); (3):=(3)-$\frac{1}{8}$(4); (5):=(5)-(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	8	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0
x_7	72	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{11}{20}$	1	0
x_8	11	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1
x_1	24	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	0
$\overline{f}$	40	0	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{10}$	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (24,8,0,0,0,0,72,11,0) với $\overline{f}$= 40

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 $\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (24,8,0,0,0,0,72,11,0). Ta thấy ẩn giả x_9 bằng 0 nên bài toán gốc có phương án tối ưu là (24,8,0,0,0) với f(x) = 40.

7.3.

$$\mathbf{f(x) = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \to max}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 + x_2 + 3x_3 - \frac{10}{3}x_4 + 5x_5 = 42} \\ \mathbf{-2x_1 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2x_5 \le 18} \\ \mathbf{5x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \le 0} \\ \mathbf{x_1 + 2x_3 - 6x_4 + 3x_5 \ge 21} \end{cases}$$

$\mathbf{x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.}$

Giải:

Đặt $g(x)= -f(x)= -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 \to \min$

Thêm ẩn bù x_6, x_7 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và ba. Thêm ẩn x_8 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ tư ta được bài toán dạng chính tắc.

$g(x)= -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - \frac{10}{3}x_4 + 5x_5 = 42 \\ -2x_1 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2x_5 + x_6 = 18 \\ 5x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_7 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 + 3x_5 - x_8 = 21 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,8}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: $g(x) = -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 + Mx_9 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - \frac{10}{3}x_4 + 5x_5 = 42 \\ -2x_1 + 2x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2x_5 + x_6 = 18 \\ 5x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_7 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 + 3x_5 - x_8 + x_9 = 21 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,9}$.

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	-1 x_1	-3 x_2	-5 x_3	-3 x_4	-6 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8
-3	x_2	42	2	1	3	$-\frac{10}{3}$	5	0	0	0
0	x_6	18	-2	0	2	$-\frac{2}{3}$	2	1	0	0
0	x_7	0	5	0	-3	2	-3	0	1	0
M	x_9	21	1	0	2	-6	**3**	0	0	-1
	$\overline{g}$	-126	-5	0	-4	13	-9	0	0	0
		21	1	0	2	-6	**3**	0	0	-1

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,42,0,0,0,18,0,0,21) với $\overline{g}$ = 21M-126

Hàng cuối có 3 số hạng dương (c_1 = M-5, c_3 = 2M-4, c_5 = 3M-9), ta chọn số dương c_5 = 3M-9 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{21}{3} < \frac{42}{5} < \frac{18}{2}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{3}$(4); (1):=(1)-5(4); (2):=(2)-2(4); (3):=(3)+3(4); (5):=(5)+9(4); (6):=(6)-3(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	7	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$
x_6	4	$-\frac{8}{3}$	0	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\frac{10}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
x_7	21	6	0	-1	-4	0	0	1	-1
x_5	7	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$
$\overline{g}$	-63	-2	0	**2**	-5	0	0	0	-3
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,7,0,0,7,4,21,0,0) với $\overline{g}$ = -63

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_3 =2), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{4}{2/3} < \frac{7}{2/3}$). Biến đổi (2):=$\frac{3}{2}$(2); (1):=(1)+$\frac{1}{3}$(2); (3):=(3)+(2); (4):=(4)-$\frac{2}{3}$(2); (5):=(5)-2(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	9	-1	1	0	$\frac{25}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	6	-4	0	1	5	0	$\frac{3}{2}$	0	1
x_7	27	2	0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	1	0
x_5	3	**3**	0	0	$-\frac{16}{3}$	1	-1	0	-1

$\overline{g}$	-75	**6**	0	0	-15	0	-3	0	-5

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,9,6,0,3,0,27,0,0) với $\overline{g}$ = -75

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_1 =6), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{3}{3} < \frac{27}{2}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{3}$(4); (1):=(1)+(4); (2):=(2)+4(4); (3):=(3)-2(4); (5):=(5)-6(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	10	0	1	0	$\frac{59}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$
x_3	10	0	0	1	$-\frac{19}{9}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$
x_7	25	0	0	0	$\frac{41}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
x_1	1	1	0	0	$-\frac{16}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$\overline{g}$	-81	0	0	0	$-\frac{13}{3}$	-2	-1	0	-3

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (1,10,10,0,0,0,25,0,0) với $\overline{g}$ = -81

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 $\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (1,10,10,0,0,0,25,0,0). Ta thấy ẩn giả x_9 bằng 0 nên bài toán min có phương án tối ưu là (1,10,10,0,0) với $g(x)_{min} = -81 \Rightarrow f(x)_{max} = -g(x)_{min} = 81$.

7.4. $f(x) = -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 44 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 28 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 22 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$.

Giải:

Đặt $g(x) = -f(x) = 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$

Thêm ẩn bù x_6, x_7 lần lượt vào ràng buộc thứ nhất và thứ ba ta được bài toán dạng chính tắc.

$g(x) = 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 44$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 28$

$-2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_7 = 22$

$-x_2 + 2x_3 + x_4 = 20$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_8 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: $g(x) = 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + Mx_8 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 44 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 28 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_7 = 22 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 + x_8 = 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,8}.$

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	7 x_1	-3 x_2	-2 x_3	1 x_4	-1 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_6	44	1	-2	1	2	0	1	0
-1	x_5	28	-1	1	-2	3	1	0	0
0	x_7	22	-2	1	1	4	0	0	1
M	x_8	20	0	-1	**2**	1	0	0	0
	$\overline{g}$	-28	-6	2	4	-4	0	0	0
		20	0	-1	**2**	1	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,28,44,22,20) với $\overline{g}$ = 20M-28

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_3 = 2M+4, c_4 = M-4), ta chọn số dương c_4 = M-4 trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{20}{2} < \frac{22}{1} < \frac{44}{1}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{2}$(4); (1):=(1)-(4); (2):=(2)+2(4); (3):=(3)-(4); (5):=(5)-4(4); (6):=(6)-2(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	34	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
x_5	48	-1	0	0	4	1	0	0
x_7	12	-2	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{7}{2}$	0	0	1
x_3	10	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\overline{g}$	-68	-6	**4**	0	-6	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,10,0,48,34,12,0) với $\overline{g}$ = -68

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_2 = 4$), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3. Biến đổi (3):=$\frac{2}{3}$(3); (1):=(1)+$\frac{3}{2}$(3); (4):=(4)+ $\frac{1}{2}$(3); (5):=(5)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

Hệ số	ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_6	46	-1	0	0	3	0	1	1
-1	x_5	48	-1	0	0	4	1	0	0
0	x_2	8	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
M	x_3	14	$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
	$\overline{g}$	-100	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{46}{3}$	0	0	$-\frac{8}{3}$

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,8,14,0,48,46,0,0) với $\overline{g}$ = -100

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 ⇒ Phương án tối ưu của bài toán (M) là (0,8,14,0,48,46,0,0). Ta thấy ẩn giả x_8 bằng 0 nên bài toán min có phương án tối ưu là (0,8,14,0,48) với $g(x)_{min} = -100 \Rightarrow f(x)_{max} = -g(x)_{min} = 100$.

<u>7.5</u>.

$$\mathbf{f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \rightarrow max}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -12} \\ \mathbf{4x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 10} \\ \mathbf{2x_1 - 2x_3 + 3x_4 \le 26} \\ \mathbf{2x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \ge 8} \end{cases}$$

$\mathbf{x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.}$

<u>Giải:</u>

Đặt $g(x)= -f(x)= -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow min$

Thêm ẩn bù x_6, x_7 lần lượt vào ràng buộc thứ hai và thứ ba, thêm ẩn bù x_8 (hệ số -1) vào ràng buộc thứ tư ta được bài toán dạng chính tắc.

$$g(x)= -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow min$$

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 12$$

$4x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 10$

$2x_1 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 26$

$2x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 – x_8 = 8$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,8}$.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: $g(x) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + Mx_9 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 12 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 26 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 - x_8 + x_9 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,10}$.

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	-3 x_1	2 x_2	1 x_3	-3 x_4	1 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8
2	x_2	12	-2	1	2	2	-4	0	0	0
0	x_6	10	4	0	-3	-1	2	1	0	0
0	x_7	26	2	0	-2	3	0	0	1	0
M	x_9	8	2	0	-2	-3	**4**	0	0	-1
	$\overline{g}$	24	-1	0	3	7	-9	0	0	0
		8	2	0	-2	-3	**4**	0	0	-1

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,12,0,0,0,10,26,0,8) với $\overline{g} = 8M+24$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = 2M-1$, $c_5 = 4M-9$), ta chọn số dương $c_4 = 4M-9$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 4 (vì $\frac{8}{4} < \frac{10}{2}$). Biến đổi (4):=$\frac{1}{4}$(4); (1):=(1)+4(4); (2):=(2)-2(4); (5):=(5)+9(4); (6):=(6)-4(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	20	0	1	0	-1	0	0	0	-1
x_6	6	3	0	-2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_7	26	2	0	-2	3	0	0	1	0
x_5	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$
$\overline{g}$	42	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$-\frac{9}{4}$

	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,20,0,0,2,6,26,0,0) với $\overline{g} = 42$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = \frac{7}{2}$, $c_5 = \frac{1}{4}$), ta chọn số dương $c_1 = \frac{7}{2}$ trên cột này có ba số dương.

Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{6}{3} < \frac{2}{1/2} < \frac{26}{2}$). Biến đổi (2):=$\frac{1}{3}$(2); (3):=(3)-2(2);

(4):=(4)$-\frac{1}{2}$(2); (5):=(5)$-\frac{7}{2}$(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	20	0	1	0	-1	0	0	0	-1
x_1	2	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
x_7	22	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_5	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$
$\overline{g}$	35	0	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$-\frac{5}{3}$

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (2,20,0,0,1,0,22,0,0) với $\overline{g} = 35$

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_3 = \frac{5}{6}$), trên cột này các số hạng đều âm và bằng 0 nên bài toán (M) không có phương án tối ưu ⇒ Bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu.

Bài 8: Bài tập tổng hợp

8.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$.

a) **Chứng minh rằng $x_0 = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ là phương án cực biên. Xuất phát từ x0, tìm lời giải của bài toán bằng phương pháp đơn hình.**

b) **Thay điều kiện $x_2 \geq 0$ bởi $x_2 \leq 0$. Tìm lời giải bài toán.**

Giải:

a) Thế $x_0 = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ vào các ràng buộc của bài toán ta được

$3.\frac{11}{4} - 0 - \frac{1}{4} = 8$ (thỏa chặt)

$\frac{11}{4} + 5.0 + 4.0 + \frac{1}{4} < 9$ (thỏa lỏng)

$2.\frac{11}{4} - 0 - 0 - 2.\frac{1}{4} = 5$ (thỏa chặt)

$x_1 = \frac{11}{4} > 0$ (thỏa lỏng)

$x_2 = 0$ (thỏa chặt)

$x_3 = 0$ (thỏa chặt)

$x_4 = \frac{1}{4} > 0$ (thỏa lỏng)

Ta thấy các ràng buộc đều thỏa nên x_0 là phương án của bài toán, trong đó có 4 ràng buộc thỏa chặt.

Từ ràng buộc thứ nhất ta có vectơ $u_1 = (3, 0, -1, -1)$

Từ ràng buộc thứ ba ta có vectơ $u_1 = (2, -1, -1, -2)$

Từ ràng buộc thứ năm ta có vectơ $u_1 = (0, 1, 0, 0)$

Từ ràng buộc thứ sáu ta có vectơ $u_1 = (0, 0, 1, 0)$

Xét: $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 0 \\ -k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 - k_2 + k_4 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $Det(A) = -4 \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

$\Rightarrow$ 4 vectơ u1, u2, u3, u4 độc lập tuyến tính.

Bài toán có 4 biến nên n=4, số ràng buộc thỏa chặt độc lập tuyến tính là 4 nên $x_0 = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ là phương án cực biên.

Xuất phát từ x_0, tìm lời giải của bài toán.

Dạng chính tắc của bài toán: $f(x) = 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$3x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 8$

$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 9$

$2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 5$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$.

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	8	3	0	-1	-1	-1	0
x_6	9	1	5	4	1	0	1
	5	2	-1	-1	-2	0	0

Hàng 1 chọn x_4 làm ẩn cơ sở, ta thực hiện các phép biến đổi (1)= -(1), (2)=(2)-(1), (3)=(3)+2(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	-8	-3	0	1	1	1	0
x_6	17	4	5	3	0	-1	1
	-11	-4	-1	1	0	2	0

Hàng 3 chọn x1 làm ẩn cơ sở, thực hiện các phép biến đổi (3)=$\frac{1}{-4}$(3), (1)=(1)+3(3), (2)=(2)-4(3), ta được bảng đơn hình mới

Hệ số	ACS	0 SHTD	4 x_1	4 x_2	-1 x_3	3 x_4	0 x_5	0 x_6
3	x_4	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_6	6	0	4	4	0	1	1
4	x_1	$\frac{11}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
	f	$\frac{47}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{7}{2}$	0

Bảng đơn cho ta phương án cực biên ($\frac{11}{4}$, 0, 0, $\frac{1}{4}$, 0, 6) với f = $\frac{47}{4}$

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c3 = $\frac{3}{4}$), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng thứ nhất (vì $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} < \frac{6}{4}$). Thực hiện các phép biến đổi (1)=4(1), (2) :=(2)-4(1), (3) :=(3)+$\frac{1}{4}$(1), (4) :=(4)$-\frac{3}{4}$(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1	0	3	1	4	-2	0
x_6	2	0	-8	0	-16	9	1
x_1	3	1	1	0	1	-1	0
f	11	0	-3	1	0	-2	0

Hàng cuối các số hạng đều âm và bằng 0 nên phương án tố ưu của bài toán là (3, 0, 1, 0) với f_{min} =11.

b) Đặt $x_2' = -x_2 \Rightarrow x_2' \geq 0$

Bài toán trở thành : $f(x) = 4x_1 - 4x_2' - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \geq 8 \\ x_1 - 5x_2' + 4x_3 + x_4 \leq 9 \\ 2x_1 + x_2' - x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_1, x_2', x_3, x_4 \geq 0$

Dạng chính tắc tương ứng: $f(x) = 4x_1 - 4x_2' - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 8 \\ x_1 - 5x_2' + 4x_3 + x_4 + x_6 = 9 \\ 2x_1 + x_2' - x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_1, x_2', x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Dạng (M) tương ứng: $f(x) = 4x_1 - 4x_2' - x_3 + 3x_4 + Mx_7 + Mx_8 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 - x_5 + x_7 = 8 \\ x_1 - 5x_2' + 4x_3 + x_4 + x_6 = 9 \\ 2x_1 + x_2' - x_3 - 2x_4 + x_8 = 5 \end{cases}$$

$x_1, x_2', x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	4 x_1	-4 x_2'	-1 x_3	3 x_4	0 x_5	0 x_6
M	x_7	8	3	0	-1	-1	-1	0
0	x_6	9	1	-5	4	1	0	1
M	x_8	5	**2**	1	-1	-2	0	0
	f	0	-4	4	1	-3	0	0
		13	**5**	1	-2	-3	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,0,9,8,5) với $\overline{f}(x) = 13M$

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_1 =5M-4, c_2' =M+4), ta chọn số dương c_1 = 5M-4, trên cột này có ba số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 (vì $\frac{9}{1} > \frac{8}{3} > \frac{5}{2}$). Biến đổi (3):=$\frac{1}{2}$(3); (1):=(1)-3(3); (2):=(2)−(3); (4):=(4)+4(3), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	**2**	-1	0

x_6	$\frac{13}{2}$	0	$-\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	2	0	1
x_1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0
f	10	0	6	-1	-7	0	0
	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	**2**	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên $(\frac{5}{2},0,0,0,0,\frac{13}{2},\frac{1}{2},0)$ với $\overline{f}(x) = \frac{1}{2}M+10$

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_4 =2M-7, $c_3=\frac{1}{2}$M-1), ta chọn số dương c_4 = 2M-7, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 (vì $\frac{1/2}{2} < \frac{13/2}{2}$). Biến đổi (1):=$\frac{1}{2}$(1); (2):=(2)-2(1); (3):=(3)+(1); (4):=(4)+7(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_6	6	0	-4	4	0	1	1
x_1	$\frac{11}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
f	$\frac{47}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{7}{2}$	0
	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên $(\frac{11}{4},0,0,\frac{1}{4},0,6,0,0)$ với $\overline{f}(x) = \frac{47}{4}$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_2' = \frac{3}{4}$, $c_3=\frac{3}{4}$), ta thấy trên cột c_2' các số hạng đều âm nên bài toan không có phương án tối ưu.

8.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

a) **Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.**
b) **Có kết luận gì về lời giải của bài toán nếu f(x)→max. Hãy chỉ ra tập phương án mà f(x) tăng vô hạn.**

Giải:

a. Đưa bài toán về dạng chính tắc: $f(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_7 vào ràng buộc thứ nhất để được bài toán (M) tương ứng: $f(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.$

Ta có bảng đơn hình tương ứng:

Hệ số	ACS	0 SHTD	-4 x_1	-2 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
M	x_7	2	-1	1	**2**	-1	0	0
0	x_5	12	4	3	-1	0	1	0
0	x_6	8	2	1	0	0	0	1
	$\overline{f}$	0	4	2	-1	0	0	0
		2	-1	1	**2**	-1	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,12,8,2) với $\overline{f} = 2M$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_2 = M+2$, $c_3 = 2M-1$), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1. Biến đổi (1):=$\frac{1}{2}$(1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)+(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_5	13	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_6	8	2	1	0	0	0	1
$\overline{f}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,1,0,13,8,0) với $\overline{f} = 1$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = \frac{7}{2}$, $c_3 = \frac{5}{2}$), trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{13}{7/2} < \frac{8}{2}$). Biến đổi (2):=$\frac{2}{7}$(2); (1):=(1)+$\frac{1}{2}$(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)-$\frac{7}{2}$(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	$\frac{20}{7}$	0	1	1	$-\frac{9}{4}$	$\frac{2}{7}$	0
x_1	$\frac{26}{7}$	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
x_6	$\frac{4}{7}$	0	-1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1
$\overline{f}$	-12	0	-1	0	0	-1	0

Hàng cuối các số hạng đều không dương nên phương án tối ưu của bài toán là $x_0=(\frac{26}{7},0,\frac{20}{7})$.

b. Nếu f(x)->max

Đặt $g(x) = -f(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$

Bài toán dạng (M) tương ứng:

$g(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số	ACS	0 SHTD	4 x_1	2 x_2	-1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
M	x_7	2	-1	1	**2**	-1	0	0
0	x_5	12	4	3	-1	0	1	0
0	x_6	8	2	1	0	0	0	1
	$\overline{g}$	0	-4	-2	1	0	0	0
		2	-1	1	**2**	-1	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,12,8,2) với $\overline{g} = 2M$

Hàng cuối có 2 số hạng dương (c_2 = M-2, c_3 = 2M+1), trên cột này có một số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1. Biến đổi (1):=$\frac{1}{2}$(1); (2):=(2)+(1); (4):=(4)-(1); (5):=(5)-2(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_5	13	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_6	8	2	1	0	0	0	1

$\overline{g}$	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_4=\frac{1}{2}$), trên cột này các số hạng đều không dương nên bài toán không có phương án tối ưu.

Phương án cực biên ở câu a) $x_0=(\frac{26}{7},0,\frac{20}{7})$ và $Z=(0,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$ là vectơ tiến ra vô hạn

Tập phương án : $x=x_0+\theta Z=(\frac{26}{7},0,\frac{20}{7}+\frac{\theta}{2})$, (với $\theta\geq 0$)

<u>8.3.</u> Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 \leq 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \geq 16 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$.

   a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.
   b. Tìm phương án tối ưu của bài toán khi có thêm điều kiện f(x)≤20.

<u>Giải:</u>

   a. Đặt $g(x) = -f(x) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \min$
   Bài toán dạng chính tắc

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 + x_7 = 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 - x_8 = 16 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,8}$.

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_9 vào ràng buộc thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: $g(x) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + Mx_9 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 + x_7 = 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 - x_8 + x_9 = 16 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,9}$.

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số		0	-3	2	1	4	1	0	0	0
	ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	x_2	38	-4	1	2	2	-4	0	0	0
0	x_6	4	**5**	0	-3	-1	2	1	0	0
0	x_7	56	-4	0	2	5	0	0	1	0
M	x_9	16	4	0	-2	-3	4	0	0	-1
	$\overline{g}$	76	-5	0	3	0	-9	0	0	0
		16	**4**	0	-2	-3	4	0	0	-1

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,38,0,0,0,4,56,0,16) với $\overline{g}(x) = 16M+76$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = 4M-5$, $c_5 = 4M-9$), ta chọn số dương $c_1 = 4M-5$, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{4}{5} < \frac{16}{4}$). Biến đổi (2):=$\frac{1}{5}$(2); (1):=(1)+4(2); (3):=(3)+4(2); (4):=(4)-4(2); (5):=(5)+5(2); (6):=(6)-4(2), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	$\frac{206}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0
x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0
x_7	$\frac{296}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0
x_9	$\frac{64}{5}$	0	0	$\boldsymbol{\frac{2}{5}}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	-1
$\overline{g}$	80	0	0	0	-1	-7	1	0	0
	$\frac{64}{5}$	0	0	$\boldsymbol{\frac{2}{5}}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	-1

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên ($\frac{4}{5}$,$\frac{206}{5}$,0,0,0,0,$\frac{296}{5}$,0,$\frac{64}{5}$) với $\overline{g}(x) = \frac{64}{5}M+80$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_3 = \frac{2}{5}M$, $c_5 = \frac{12}{5}M-7$), ta chọn số dương $c_3 = \frac{2}{5}M$, trên cột này có một số dương ở hàng thứ tư, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (4):=$\frac{5}{2}$(4); (1):=(1)+$\frac{2}{5}$(4); (2):=(2)+$\frac{3}{5}$(4); (3):=(3)+$\frac{2}{5}$(4); (6):=(6)-$\frac{2}{5}$(4), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	54	0	1	0	-1	0	0	0	-1
x_1	20	1	0	0	$-\frac{7}{2}$	4	-1	0	$-\frac{3}{2}$
x_7	72	0	0	0	2	4	0	1	-1
x_3	32	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	6	-2	0	$-\frac{5}{2}$
$\overline{g}$	80	0	0	0	-1	-7	**1**	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ta thấy hàng cuối có một số dương, trên cột này các số hạng đều âm nên bài toán không có phương án tối ưu.

b. Khi $f(x) \le 20$, ta có :

$f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 \le 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \ge 16 \end{cases}$$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 \le 20$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$

Đặt $g(x) = -f(x) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \to \min$
Bài toán dạng chính tắc

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 + x_7 = 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 - x_8 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 + x_9 = 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,9}.$

Bài toán trên không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm ẩn giả x_{10}, x_{11} lần lượt vào ràng buộc thứ nhất và thứ tư để được bài toán (M) tương ứng: $\overline{g(x)} = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + Mx_{10} + Mx_{11}$
$\to \min$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 + x_{10} = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 + x_7 = 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 - x_8 + x_{11} = 16 \end{cases}$$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 + x_9 = 20$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,11}$.

Ta có bảng đơn hình :

Hệ số	ACS	0 SHTD	-3 x_1	2 x_2	1 x_3	4 x_4	1 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8	0 x_9
M	x_{10}	38	-4	1	2	2	-4	0	0	0	0
0	x_6	4	5	0	-3	-1	2	1	0	0	0
0	x_7	56	-4	0	2	5	0	0	1	0	0
M	x_{11}	16	4	0	-2	-3	4	0	0	-1	0
0	x_9	20	3	-2	-1	-4	-1	0	0	0	1
	$\overline{g}$	0	3	-2	-1	-4	-1	0	0	0	0
		54	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,0,0,0,0,4,56,0,20,38,16) với $\overline{g}(x) = 54M$

Hàng cuối có 1 số hạng dương ($c_2 = M-2$), trên cột này có một số dương ở hàng thứ nhất, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (5):=(5)+2(1); (6):=(6)+2(1); (7):=(7)-(1), ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_2	38	-4	1	2	2	-4	0	0	0	0
x_6	4	**5**	0	-3	-1	2	1	0	0	0
x_7	56	-4	0	2	5	0	0	1	0	0
x_{11}	16	4	0	-2	-3	4	0	0	-1	0
x_9	96	-5	0	3	0	-9	0	0	0	1
$\overline{g}$	76	-5	0	3	0	-9	0	0	0	0
	16	**4**	0	-2	-3	4	0	0	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (0,38,0,0,0,4,56,0,96,0,16) với $\overline{g}(x) = 16M+76$

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_1 = 4M-5$, $c_5 = 4M-9$), ta chọn số dương $c_5 = 4M-5$, trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2. Biến đổi (2):=$\frac{1}{5}$(2); (1):=(1)+4(3); (3):=(3)+4(2); (4):=(4)-4(2); (5):=(5)+5(2); (6)=(6)+5(2) ; (7) := (7) -4(2), ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_2	$\frac{206}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	0
x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0
x_7	$\frac{296}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	0

x_{11}	$\frac{64}{5}$	0	0	$\mathbf{\frac{2}{5}}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	-1	0
x_9	100	0	0	0	-1	-7	1	0	0	1
$\overline{g}$	80	0	0	0	-1	-7	1	0	0	0
	$\frac{64}{5}$	0	0	$\mathbf{\frac{2}{5}}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	-1	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên $(\frac{4}{5},\frac{206}{5},0,0,0,0,\frac{296}{5},0,100,0,\frac{64}{5})$với $\overline{g}(x) = \frac{64}{5}M+80$

Hàng cuối có 3 số hạng dương ($c_3 = \frac{2}{5}M$, $c_5=\frac{12}{5}M-7$, $c_6=\frac{12}{5}+1$), ta chọn $c_3 = \frac{2}{5}M$, trên cột này có một số dương ở hàng thứ tư, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (4):=$\frac{5}{2}$(4); (1):=(1)+$\frac{2}{5}$(4); (2):=(2)+$\frac{3}{5}$(4); (3):=(3)+$\frac{2}{5}$(4); (7):=(7)-$\frac{2}{5}$(4), ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_2	54	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0
x_1	20	1	0	0	$-\frac{7}{2}$	4	-1	0	$-\frac{3}{2}$	0
x_7	72	0	0	0	2	4	0	1	-1	0
x_3	32	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	6	-2	0	$-\frac{5}{2}$	0
x_9	100	0	0	0	-1	-7	**1**	0	0	1
$\overline{g}$	80	0	0	0	-1	-7	**1**	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (20,54,32,0,0,0,72,0,100,0,0) với $\overline{g}(x) = 80$

Hàng cuối có 1 số hạng dương (c_6=1), trên cột này có một số dương ở hàng thứ năm, ta chọn làm phần tử trục xoay. Biến đổi (2):=(2)+(5); (4):=(4)+2(5); (6)=(6)-(5), ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_2	54	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0
x_1	120	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	-3	0	0	$-\frac{3}{2}$	1
x_7	72	0	0	0	2	4	0	1	-1	0
x_3	32	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	-8	0	0	$-\frac{5}{2}$	2
x_6	232	0	0	0	$-\frac{15}{2}$	-7	1	0	0	1
$\overline{g}$	-20	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Bảng đơn hình cho ta phương án cực biên (120,54,32,0,0,232,72,0,0,0,0) với $\overline{g}(x) = -20$

Ta thấy hàng cuối bao gồm các số không dương và các ẩn giả của bài toán (M) đều bằng 0 nên bài toán ban đầu có phương án tối ưu là (120,54,32,0,0) với $f(x)_{max} = - g(x)_{min} = 20$.

<u>Bài 9 :</u> Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình

<u>Bài 9.1</u>. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}$.

<u>Giải:</u>

Đưa bài toán về dạng chuẩn ta được bài toán (M): $\overline{f}(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + M(x_6 + x_7) \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,7}$.

Ta có bảng đơn hình:

Hệ số	ACS	0 SHTD	3 x_1	4 x_2	2 x_3	2 x_4	0 x_5
M	x_6	28	2	2	0	1	0
0	x_5	31	1	5	3	-2	1
M	x_7	16	2	-2	2	1	0
	$\overline{f}$	0	-3	-4	-2	-2	0
		44	4	0	2	2	0

Phương án cực biên (0,0,0,0,31,28,16), $\overline{f} = 0$. Hàng cuối có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất $c_1 = 4M – 3$. Trên cột này có 3 số dương ta chọn số dương ở hàng thứ 3 làm phần tử trục xoay (vì 16/2 < 28/2 < 31/1). Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=(1)-2(3) ; (2):=(2)–(3) ; (3):= ½.(3); (4):=(4)+3(3) ; (5):=(5)–4(3).

Ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_6	12	0	4	-2	0	0

x_5	23	0	6	2	-5/2	1
x_1	8	1	-1	1	1/2	0
$\overline{f}$	24	0	-7	1	-1/2	0
	12	0	4	-2	0	0

Phương án cực biên(8,0,0,0,23,12,0), $\overline{f}$ = 24. Hàng cuối có 1 số dương, trên cột này có 2 số dương, ta chọn số dương ở hàng thứ nhất làm phần tử trục xoay (vì 12/4 < 23/6). Ta thực hiện các phép biến đổi sau : (1):= ¼ .(1) ; (2):=(2)–6(1) ; (3):=(3)+(1) ; (4):=(4)+7(1); (5):=(5)–4(1)

Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	0	1	-1/2	0	0
x_5	5	0	0	5	-5/2	1
x_1	11	1	0	1/2	1/2	0
$\overline{f}$	45	0	0	-5/2	-1/2	0
	0	0	0	0	0	0

Hàng cuối các số hạng đều không dương.

Vậy bài toán có phương án tối ưu là: (11,3,0,0,5) với f_{min} = 45

Bài 9.2

$$\mathbf{f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow min}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 10} \\ \mathbf{-3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8} \\ \mathbf{4x_1 - x_2 - 2x_3 = 4} \end{cases}$$

$$\mathbf{x_j \geq 0 \ ; \ j = \overline{1,4}}$$

Giải:

Bài toán chưa có ẩn cơ sở nên ta cần thêm ba ẩn giả là x_5, x_6 , $x_7 \geq 0$ để được bài toán (M)

$$\overline{f} = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 8 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ ; \ j = \overline{1,7}$$

Ta có bảng đơn hình:

HS	ACS	0 SHTD	3 x_1	-2 x_2	2 x_3	1 x_4
M	x_5	10	2	-1	4	1
M	x_6	8	-3	2	1	-2
M	x_7	4	4	-1	-2	0
	$\overline{f}$	0	-3	2	-2	-1
		22	3	0	3	-1

Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương ở cột 6 (vì 3M – 2 > 3M – 3) với phần tử trục xoay trên hàng 1 (vì 10/4 < 8/1). Thực hiện các biến đổi: (1):= ½.(1); (2):=(2)–(1); (3):=(3)+2(1); (4):=(4)+2(1); (5):=(5)–3(1)

Ta được bảng đơn hình sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	5/2	1/2	-1/4	1	1/4
x_6	11/2	-7/2	9/4	0	-9/4
x_7	9	5	-3/2	0	1/2
$\overline{f}$	5	-2	3/2	0	-1/2
	29/2	3/2	3/4	0	-7/4

Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương ở cột 3 (vì 3/2.M – 2 > ¾.M + 3/2) với phần tử trục xoay trên hàng 3. Thực hiện các biến đổi (3):= 1/5.(3); (1):=(1)– ½.(3); (2):=(2)+7/2.(3); (4):=(4)+2(3); (5):=(5)–3/2.(3)

Ta được bảng sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	8/5	0	-1/10	1	1/5
x_6	59/5	0	6/5	0	-19/2
x_1	9/5	1	-3/10	0	-3/8
$\overline{f}$	43/5	0	9/10	0	-3/10
	59/2	0	6/5	0	-19/10

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 (vì 6/5.M + 9/10 > 0) với phần tử trục xoay trên hàng 2. Thực hiện các biến đổi : (2):= 5/6.(2); (1):=(1)+1/10.(2); (3):=(3)+3/10.(2); (4):=(4)9/10.(2); (5):=(5)–6/5.(2)

Ta được bảng sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	31/12	0	0	1	1/24
x_2	59/6	0	1	0	-19/12
x_1	19/4	1	0	0	-3/8
f	-1/4	0	0	0	9/8

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 với phần tử trục xoay trên hàng 1. Thực hiện các biến đổi: (1):= 24(1); (2):=(2)+19/12.(1); (3):=(3)+3/8.(1); (4):=(4)–9/8.(1)

Ta được bảng sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	62	0	0	24	1
x_2	108	0	1	38	0
x_1	28	1	0	9	0
f	-70	0	0	-27	0

Phương án tối ưu: (28; 108; 0; 62) với $f_{min} = -70$

Bài 9.3

$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,4}$

Giải:

Bài toán này đã có một ẩn cơ sở là x_4 nên ta chỉ cần thêm hai ẩn giả là x_5 , $x_6 \geq 0$ để được bài toán (M)

$\overline{f} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,6}$

Bảng đơn hình

HS	ACS	0 SHTD	-1 x_1	-2 x_2	-3 x_3	1 x_4
M	x_5	15	1	2	3	0
M	x_6	20	2	1	5	0
1	x_4	10	1	2	1	1
	$\overline{f}$	10	2	4	4	0

		35	3	3	8	0

Hàng cuối có ba số dương, ta chọn số dương ở cột 6 (vì 8M + 4 lớn nhất) với phần tử trục xoay trên hàng 2 (vì 20/5 < 15/3 < 10/1). Thực hiện các biến đổi sau: (2):=1/5(2); (1):=(1)–3(2); (3):=(3)–(2); (4):=(4)–4(2); (5):=(5)–8(2).

Ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	3	-1/5	7/5	0	0
x_3	4	2/5	1/5	1	0
x_4	6	3/5	9/5	0	1
$\overline{f}$	-6	2/5	16/5	0	0
	3	-1/5	7/5	0	0

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 4 với phần tử trục xoay trên hàng 1

(vì 15/7 < 30/9 < 20/1). Thực hiện các biến đổi: (1):=5/7(1); (2):=(2)–1/5(1); (3):=(3)–3/5.(1); (4):=(4)–2/5(1); (5):=(5)+1/5(1)

Ta được bảng sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	15/7	-1/7	1	0	0
x_3	25/7	2/5	0	1	0
x_4	15/7	6/7	0	0	1
f	-90/7	6/7	0	0	0

Hàng cuối có một số dương, ta chọn số dương ở cột 3 với phần tử trục xoay trên hàng 3 (vì 25/7 < 125/14). Thực hiện các biến đổi: (3):= 7/6(3); (1):=(1)+1/7.(3); (2):=(2)–2/5(3); (4):=(4)6/7(3).

Ta được bảng sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	5/2	0	1	0	1/6
x_3	5/2	0	0	1	-1/2
x_1	5/2	1	0	0	7/6
f	-15	0	0	0	-1

Phương án tối ưu (5/2; 5/2; 5/2; 0) với $f_{min} = -15$

Bài 9.4

$$\mathbf{f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to min}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_1 + x_2 + x_3 \geq 7} \\ \mathbf{3x_1 + x_2 + x_3 \geq 8} \\ \mathbf{2x_1 \qquad\; + x_3 \geq 5} \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,3}$

Giải:

Dạng chính tắc:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 8 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 - x_6 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,6}$

Dạng (M): $\overline{f} = 2x_1 + x_2 + x_3 + Mx_7 + Mx_8 + Mx_9 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 8 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 - x_6 + x_9 = 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,9}$

Ta có bảng đơn hình sau:

HS	ACS	0 SHTD	2 x_1	1 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
M	x_7	7	2	1	1	-1	0	0
0	x_8	8	3	1	1	0	-1	0
M	x_9	5	2	0	1	0	0	-1
	$\overline{f}$	0	-2	-1	-3	0	0	0
		20	7	2	3	-1	-1	-1

Phương án cực biên (0,0,0,0,0,0,7,8,5) $\overline{f}$ =0. Hàng cuối có 3 số dương, ta chọn số dương lớn nhất $c_1 = 7M - 2$. trên cột này có 3 số dương, ta chọn số dương ở hàng thứ 3 làm phần tử trục xoay vì 5/2 < 8/3 < 7/2. Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=(1)–2(3); (2):=(2)–3(3); (3):= ½(3) ; (4):=(4)+2(3); (5):=(5)–7(3)

Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	2	0	1	0	-1	0	1
x_8	1/2	0	1	-1/2	0	-1	3/2
x_1	5/2	1	0	1/2	0	0	-1/2
$\overline{f}$	5	0	-1	-2	0	0	-1

	5/2	0	2	-1/2	-1	-1	5/2

Phương án cực biên(5/2,0,0,0,0,0,2, ½,0) $\overline{f}$ =5. Hàng cuối có 2 số dương, ta chọn số dương lớn nhất c_6= 5/2.M – 1 . trên cột này có 2 số dương. Ta chọn số dương ở hàng thứ 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi sau: (1):=(1)–(2); (2):=2/3.(2); (3):=(3)+½(2); (4):=(4)+1(2); (5):=(5)5/2(2)

Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	5/3	0	1/3	1/3	-1	2/3	0
x_6	1/3	0	-2/3	-1/3	0	-2/3	1
x_1	8/3	1	1/3	1/3	0	-1/3	0
$\overline{f}$	16/3	0	-1/3	-7/3	0	-2/3	0
	5/3	0	1/3	-1/3	-1	2/3	0

Phương án cực biên(8/3,0,0,0,0, 1/3 , 5/3,0,0) $\overline{f}$ =16/3. Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương lớn nhất c_5= 2/3M – 2/3. Trên cột này có 1 số dương. Ta chọn số đó làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi sau : (1):=3/2(1); (2):=(2)+2/3(1); (3):=(3)+1/3(1); (4):=(4)+2/3(1); (5):=(5)–2/3(1)

Ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	5/2	0	1/2	1/2	-3/2	1	0
x_5	2	0	1	0	-1	0	1
x_1	7/2	1	1/2	1/2	-1/2	0	0
$\overline{f}$	7	0	0	-2	-1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Phương án tối ưu: (7/2; 0; 0) với f_{min} = 7

Bài 9.5

f(x) = $x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow$ min

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; j = $\overline{1,3}$

Giải:

Dạng chính tắc:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ \\ \end{cases}$$

$3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 = 8$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,6}$

Dạng (M)

$\overline{f} = x_1 + x_2 + 2x_3 + Mx_7 + Mx_8 + Mx_9 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_7 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + x_8 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 + x_9 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = \overline{1,9}$

Ta có bảng đơn hình:

HS	ACS	0 SHTD	1 x_1	1 x_2	2 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
M	x_7	5	1	3	-1	-1	0	0
M	x_8	2	**3**	-1	3	0	-1	0
M	x_9	8	2	3	1	0	0	-1
	$\overline{f}$	0	-1	-1	-2	0	0	0
		15	6	5	3	-1	-1	-1

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương cột 4 (6M - 1), trên cột có 3 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay (vì 2/3 là tỉ số dương bé nhất). Thực hiện các phép biến đổi: (2):=1/3.(2), (1):=(1)-(2); (3):=(3)-2(2); (4):=(4)+(2); (5):=(5)-6(2)

Ta có bảng đơn hình:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_7	13/3	0	**10/3**	-2	-1	1/3	0
x_1	2/3	1	-1/3	1	0	-1/3	0
x_9	20/3	0	11/3	-1	0	2/3	-1
$\overline{f}$	2/3	0	-4/3	-1	0	-1/3	0
	11	0	7	-3	-1	1	-1

Hàng cuối có 2 số dương, chọn số dương cột 4 (7M – 4/3); trên cột có 2 số dương, chọn số dương hàng 1 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (1):=3/10.(1); (2):=(2)+1/3.(1); (3):=(3)11/3.(1); (4):=(4)+4/3.(1); (5):=(5)–7.(1)

Ta có bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	13/10	0	1	-3/5	-3/10	1/10	0
x_1	11/10	1	0	**4/5**	-1/10	-3/10	0

x_9	19/10	0	0	6/5	11/10	3/10	-1
$\overline{f}$	12/5	0	0	**-9/5**	-4/10	-1/5	0
	19/10	0	0	**6/5**	11/10	3/10	-1

Hàng cuối có 3 số dương, chọn số dương cột 5, trên cột này có 2 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện phép biến đổi: (2):= 5/4.(2); (1):= (1) + 3/5.(2); (3):=(3)– 6/5.(2); (4):=(4)+9/5.(2); (5):=(5)–6/5.(2)

Bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	17/8	3/4	1	0	-3/8	-1/8	0
x_3	11/8	5/4	0	1	-1/8	-3/8	0
x_9	1/4	-3/2	0	0	**5/4**	3/4	-1
$\overline{f}$	39/8	9/4	0	0	**-5/8**	-7/8	0
	1/4	-3/2	0	0	**5/4**	3/4	-1

Hàng cuối có 2 số dương, chọn số dương cột 6, trên cột này có 1 số dương (hàng 3) chọn làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (3):=4/5.(3); (1):=(1)+3/8.(3); (2):=(2)+1/8.(3); (4):=(4)+5/8.(3); (5):=(5)–5/4.(3)

Bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	11/5	3/10	1	0	0	1/10	-3/10
x_3	7/5	11/10	0	1	0	-3/10	-1/10
x_4	1/5	-6/5	0	0	1	3/5	-4/5
$\overline{f}$	5	3/2	0	0	0	-1/2	-1/2
	0	0	0	0	0	0	0

Hàng chứa hệ số M tương ứng đều bằng 0, loại bỏ đi hàng cuối ta có bảng đơn hình sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	11/5	3/10	1	0	0	1/10	-3/10
x_3	7/5	**11/10**	0	1	0	-3/10	-1/10
x_4	1/5	-6/5	0	0	1	3/5	-4/5
f	5	**3/2**	0	0	0	-1/2	-1/2

Hàng cuối có 1 số dương (cột 3), trên cột này có 2 số dương, chọn số dương hàng 2 làm phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: (2):=10/11.(2); (1):=(1)–3/10.(2); (3):=(3)+6/5.(2); (4):=(4)3/2.(2)

Bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	20/11	0	1	-3/11	0	2/11	-3/11
x_1	14/11	**1**	0	10/11	0	-3/11	-1/11
x_4	19/11	0	0	12/11	1	3/11	-10/11
f	34/11	**0**	0	-15/11	0	-1/11	-4/11

Hàng cuối các số đều không dương

Bài toán ban đầu có phương án tối ưu là: (14/11; 20/11; 0) với f_{min} = 34/11.