BÀI GIẢI

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

(GV: Trần Ngọc Hội – 2009)

CHƯƠNG 3

LÝ THUYẾT MẪU VÀ ƯỚC LƯỢNG

Bài 3.1. Để khảo sát trọng lượng X của một loại vật nuôi trong nông trại, người ta quan sát một mẫu và có kết qủa sau:

X(kg)	36	42	48	54	60	66	72
Số con	15	12	25	18	10	10	10

a) Ước lượng trọng lượng trung bình của loại vật nuôi trên với độ tin cậy 96%.

b) Với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình tối đa của loại vật nuôi trên là bao nhiêu? Tối thiểu là bao nhiêu?

c) Những con vật có trọng lượng từ 60kg trở lên được gọi là những con "đạt tiêu chuẩn". Hãy ước lượng tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 95%.

d) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 99% và độ chính xác 10% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu con vật nữa?

e) Với độ tin cậy 90%, tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn tối đa của loại vật nuôi trên là bao nhiêu? Tối thiểu là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$n = 100;\ \sum X_i n_i = 5196;\ \sum X_i^2 n_i = 282096.$$

- Kỳ vọng mẫu của X là

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i = 51,96(\text{kg}).$$

- Phương sai mẫu của X là:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_i - \overline{X}^2 = (11,0054)^2(\text{kg}^2).$$

- Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2 = (11,0608)^2(\text{kg}^2).$$

- Tỉ lệ mẫu con đạt tiêu chuẩn là

$$F_n = \frac{m}{n} = \frac{30}{100} = 0,3$$

vì trong n = 100 con có m = 10 + 10 + 10 = 30 con có trọng lượng từ 60kg trở lên, nghĩa là có 30 con đạt tiêu chuẩn.

a) Ước lượng trọng lượng trung bình của loại vật nuôi trên với độ tin cậy 96%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 96\% = 0,96$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,96/2 = 0,48$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,06$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(51,96 - 2,06\frac{11,0608}{\sqrt{100}}; 51,96 + 2,06\frac{11,0608}{\sqrt{100}}) = (49,68; 54,24).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 96%, trọng lượng trung bình của một con nằm trong khoảng từ 49,68kg đến 54,24kg.

b) Với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình tối đa của loại vật nuôi trên là bao nhiêu? Tối thiểu là bao nhiêu?

Ta có độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 95\% = 0,95$ ($\alpha = 0,05$).

- Để biết trọng lượng trung bình tối đa của loại vật nuôi trên là bao nhiêu ta cần ước lượng khoảng bên trái cho kỳ vọng $\mu = M(X)$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng bên trái cho kỳ vọng:

$$(-\infty; \overline{X} + z_{2\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_{2\alpha}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2.0,05)/2 = 0,90/2 = 0,45$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_{2\alpha} = 1,65$. Suy ra trọng lượng trung bình tối đa là:

$$\overline{X} + z_{2\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 51,96 + 1,65\frac{11,0608}{\sqrt{100}} = 53,7850(\text{kg}).$$

Vậy với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình tối đa của loại vật nuôi trên là 53,7850kg.

- Để biết trọng lượng trung bình tối thiểu của loại vật nuôi trên là bao nhiêu ta cần ước lượng khoảng bên phải cho kỳ vọng $\mu = M(X)$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng bên trái cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_{2\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}; +\infty),$$

trong đó $z_{2\alpha} = 1,65$. Suy ra trọng lượng trung bình tối thiểu là:

$$\overline{X} - z_{2\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 51,96 - 1,65\frac{11,0608}{\sqrt{100}} = 50,1350(kg).$$

Vậy với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình tối thiểu của loại vật nuôi trên là 50,1350kg.

c) Những con vật có trọng lượng từ 60kg trở lên được gọi là những con "đạt tiêu chuẩn". Hãy ước lượng tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p con đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy γ = 1- α = 95% = 0,95. Ta có công thức ước lượng khoảng :

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$ = 0,95/2 = 0,475. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 1,96. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{100}}; 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{100}}) = (21,02\%; 38,98\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn nằm trong khoảng từ 21,02% đến 38,98%.

d) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 99% và độ chính xác 10% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu con vật nữa?

Đây là bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn với độ chính xác ε = 10% = 0,1 và độ tin cậy γ = 1- α = 99% = 0,99. Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$ = 0,99/2 = 0,495. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 2,58. Suy ra

$$n = \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2}$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2,58^2.0,3(1-0,3)}{0,1^2} \approx 139,7844.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thoả bất đẳng thức trên là n_1 = 140. Vì n_1 = 140 > 100 (100 là cỡ mẫu đang có) nên ta cần điều tra thêm ít nhất là 140 -100 = 40 con vật nữa.

e) Với độ tin cậy 90%, tỉ lệ con đạt tiêu chuẩn tối đa của loại vật nuôi trên là bao nhiêu? Tối thiểu là bao nhiêu?

Ta có độ tin cậy γ = 1 - α = 90% = 0,90 (α = 0,1).

- Để biết tỉ lệ tối đa con đạt tiêu chuẩn của loại vật nuôi trên là bao nhiêu ta cần ước lượng khoảng bên trái cho tỉ lệ p con đạt tiêu chuẩn.

Ta có công thức ước lượng khoảng bên trái cho tỉ lệ p :

$$(-\infty; F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_{2\alpha})$ = (1- 2α)/2 = 0,80/2 = 0,40. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_{2\alpha}$ = 1,28. Suy ra tỉ lệ tối đa con đạt tiêu chuẩn là:

$$F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,3 + 1,28\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{100}} = 0,3587.$$

Vậy với độ tin cậy 90%, tỉ lệ tối đa con đạt tiêu chuẩn của loại vật nuôi trên là 35,87%.

- Để biết tỉ lệ tối thiểu con đạt tiêu chuẩn của loại vật nuôi trên là bao nhiêu ta cần ước lượng khoảng bên phải cho tỉ lệ p con đạt tiêu chuẩn.

Ta có công thức ước lượng khoảng bên phải cho tỉ lệ p:

$$(F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; +\infty),$$

trong đó $z_{2\alpha}$ = 1,28. Suy ra tỉ lệ tối thiểu con đạt tiêu chuẩn là:

$$F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,3 - 1,28\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{100}} = 0,2413.$$

Vậy với độ tin cậy 90%, tỉ lệ tối thiểu con đạt tiêu chuẩn của loại vật nuôi trên là 24,13%.

Bài 3.2. Cân thử 100 trái quít của một vườn, ta có bảng kết quả sau:

X(g)	40	50	60	70	80	90	100	110
Số trái	3	10	12	15	28	16	11	5

trong đó X chỉ trọng lượng (đơn vị tính gam).

a) Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một trái quít trong vườn quít trên với độ tin cậy 94%.

b) Những trái quít có trọng lượng X > 75g là trái loại I. Hãy ước lượng tỉ lệ trái loại I trong vườn quít trên với độ tin cậy 95%.

c) Những trái quít có trọng lượng X < 65g là trái loại III. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một trái quít loại III trong vườn quít trên với độ tin cậy 99% (Giả sử X có phân phối chuẩn).

Lời giải

Ta có:

$$n = 100; \sum X_i n_i = 7720; \sum X_i^2 n_i = 625800.$$

- Kỳ vọng mẫu của X là

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i = 77,2(g).$$

- Phương sai mẫu của X là:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_i - \overline{X}^2 = (17,2673)^2(g^2).$$

- Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2 = (17,3543)^2(kg^2).$$

- Tỉ lệ mẫu trái loại I là

$$F_n = \frac{m}{n} = \frac{60}{100} = 0,6.$$

vì trong $n = 100$ trái có $m = 28 + 16 + 11 + 5 = 60$ trái có trọng lượng từ 75g trở lên, nghĩa là có 60 trái loại I.

a) Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một trái quít trong vườn quít trên với độ tin cậy 94%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 94\% = 0,94$.

Vì $n = 100 \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,94/2 = 0,47$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,88$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(77,2 - 1,88\frac{17,3543}{\sqrt{100}}; 77,2 + 1,88\frac{17,3543}{\sqrt{100}}) = (73,94; 80,46).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 94%, trọng lượng trung bình của một trái quýt từ 73,94g đến 80,46g.

b) Những trái quít có trọng lượng X > 75g là trái loại I. Hãy ước lượng tỉ lệ trái loại I trong vườn quít trên với độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các trái loại I với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 95\% = 0,95$.

Ta có công thức ước lượng khoảng:

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,96$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,60 - 1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{100}}; 0,60 + 1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{100}}) = (50,40\%; 69,60\%)$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ trái loại I từ 50,40% đến 69,60%.

c) Những trái quít có trọng lượng X < 65g là trái loại III. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một trái quít loại III trong vườn quít trên với độ tin cậy 99% (Giả sử X có phân phối chuẩn).

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu_{III} = M(X_{III})$ của chỉ tiêu $X = X_{III}$ của những trái quít loại III với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 99\% = 0,99$.

Ta lập bảng số liệu của X_{III}:

X_{IIIi}	40	50	60
n_{IIIi}	3	10	12

Từ bảng trên ta tính được:

$$n_{III} = 25; \sum X_{IIIi}n_{IIIi} = 1340; \sum X_{IIIi}^2 n_{IIIi} = 73000.$$

- Kỳ vọng mẫu của X_{III} là

$$\overline{X}_{III} = \frac{1}{n_{III}}\sum X_{IIIi}n_{IIIi} = 53,6 \text{ (g)}.$$

- Phương sai mẫu của X_{III} là:

$$\hat{S}_{III}^2 = \frac{1}{n_{III}}\sum X_{IIIi}^2 n_{IIIi} - \overline{X}_{III}^2 = (6,8586)^2(g^2).$$

- Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X_{III} là:

$$S_{III}^2 = \frac{n_{III}}{n_{III}-1}\hat{S}_{III}^2 = 7^2 \text{ } (g^2).$$

Vì $n_{III} < 30$, X_{III} có phân phối chuẩn, $\sigma_{III}^2 = D(X_{III})$ chưa biết, nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X}_{III} - t_\alpha^k \frac{S_{III}}{\sqrt{n_{III}}}; \overline{X}_{III} + t_\alpha^k \frac{S_{III}}{\sqrt{n_{III}}}),$$

trong đó t_α^k được xác định từ bảng phân phối Student với $k = n_{III} - 1 = 24$ và $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,99 = 0,01$. Tra bảng phân phối Student ta được $t_\alpha^k = 2,797$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(53,6 - 2,797\frac{7}{\sqrt{25}}; 53,6 + 2,797\frac{7}{\sqrt{25}}) = (49,68; 57,52).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 99%, trọng lượng trung bình của một trái quít loại III từ 49,68g đến 57,52g.

Bài 3.3. Để khảo sát chỉ tiêu X của một loại sản phẩm của xí nghiệp I, người ta quan sát một mẫu trong kho và có kết qủa sau:

X(cm)	11-15	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39
Số sphẩm	8	9	20	16	16	13	18

a) Ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu X của loại sản phẩm trên với độ tin cậy 96%.
b) Nếu ước lượng GTTB của X với độ chính xác 1,8cm thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?
c) Nếu ước lượng GTTB của X với độ chính xác 1,5cm và độ tin cậy 99% thì phải điều tra thêm ít nhất bao nhiêu sản phẩm nữa?
d) Những sản phẩm có chỉ tiêu X từ 19cm trở xuống được gọi là những sản phẩm loại B. Ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu X của những sản phẩm loại B với độ tin cậy 98% (GS X có phân phối chuẩn).
e) Hãy ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại B với độ tin cậy 92%. Bảng số liệu trên được chọn ngẫu nhiên từ một kho trong đó có 1000 sản phẩm loại B. Hãy ước lượng số sản phẩm trong kho với độ tin cậy 92%.
f) Nếu ước lượng tỉ lệ những sp loại B với độ chính xác 6% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?
g) Nếu ước lượng tỉ lệ những sản phẩm loại B với độ tin cậy 96% và độ chính xác 8% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?
h) Giả sử trong kho để lẫn 1000 sản phẩm của xí nghiệp II và trong 100 sản phẩm lấy từ kho có 9 sản phẩm của xí nghiệp II. Hãy ước lượng số sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho với độ tin cậy 82%.

Lời giải

Lập bảng

X_i	13	17	21	25	29	33	37
n_i	8	9	20	16	16	13	18

Ta có:

$$n = 100;\ \sum X_i n_i = 2636;\ \sum X_i^2 n_i = 75028.$$

- Kỳ vọng mẫu của X là
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i = 26,36(\text{cm}).$$
- Phương sai mẫu của X là:
$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_i - \overline{X}^2 = (7,4452)^2(\text{cm}^2).$$
- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của X là:
$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2 = (7,4827)^2(\text{cm}^2).$$

a) Ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu X của loại sản phẩm trên với độ tin cậy 96%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 96\% = 0,96$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,96/2 = 0,48$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,06$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(26,36 - 2,06\frac{7,4827}{\sqrt{100}}; 26,36 + 2,06\frac{7,4827}{\sqrt{100}}) = (24,82; 27,90).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 96%, giá trị trung bình của chỉ tiêu X nằm trong khoảng từ 24,82cm đến 27,93 cm.

b) Nếu ước lượng GTTB của X với độ chính xác 1,8cm thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

Đây là bài toán xác định độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha$ khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu X với độ chính xác $\varepsilon = 1,8$cm.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Suy ra

$$z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S} = \frac{1,8.\sqrt{100}}{7,4827} = 2,41.$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(2,41) = 2.0,4920 = 98,40\%.$$

Vậy độ tin cậy đạt được là 98,40%.

c) Nếu ước lượng GTTB của X với độ chính xác 1,5cm và độ tin cậy 99% thì phải điều tra thêm ít nhất bao nhiêu sản phẩm nữa?

Đây là bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu X với độ chính xác $\varepsilon = 1,5$cm và độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 99\% = 0,99$. Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,99/2 = 0,495$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,58$. Suy ra

$$n = \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \ge \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{2,58.7,4827}{1,5}\right)^2 \approx 165,64.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thỏa bất đẳng thức trên là $n_1 = 166$. Vì $n_1 = 166 > 100$ (100 là cỡ mẫu đang có) nên ta cần điều tra thêm ít nhất là 166 – 100 = 66 sản phẩm nữa.

d) Những sản phẩm có chỉ tiêu X từ 19cm trở xuống được gọi là những sản phẩm loại B. Ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu X của những sản phẩm loại B với độ tin cậy 98% (GS X có phân phối chuẩn).

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu_B = M(X_B)$ của chỉ tiêu $X = X_B$ của những sản phẩm loại B với độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 98\% = 0,98$. Ta lập bảng số liệu của X_B:

X_{Bi}	13	17
n_{Bi}	8	9

Từ bảng trên ta tính được:

$$n_B = 17;\ \sum X_{Bi} n_{Bi} = 257;\ \sum X_{Bi}^2 n_{Bi} = 3,953.$$

- Kỳ vọng mẫu của X_B là

$$\overline{X}_B = \frac{1}{n}\sum X_{Bi} n_{Bi} = 15,1176\ (cm).$$

- Phương sai mẫu của X_B là:

$$\hat{S}_B^2 = \frac{1}{n}\sum X_{Bi}^2 n_{Bi} - \overline{X}_B^2 = (1,9965)^2 (cm^2).$$

- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của X_B là:

$$S_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1}\hat{S}_B^2 = (2,0580)^2\ (cm^2).$$

Vì $n_B < 30$, X_B có phân phối chuẩn, $\sigma^2_B = D(X_B)$ chưa biết, nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X}_B - t_\alpha^k \frac{S_B}{\sqrt{n_B}}; \overline{X}_B + t_\alpha^k \frac{S_B}{\sqrt{n_B}}),$$

trong đó t_α^k được xác định từ bảng phân phối Student với $k = n_B - 1 = 16$ và $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,98 = 0,02$. Tra bảng phân phối Student ta được $t_\alpha^k = 2,583$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(15,1176 - 2,583\frac{2,0580}{\sqrt{17}}; 15,1176 + 2,583\frac{2,0580}{\sqrt{17}}) = (13,83; 16,41).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 98%, giá trị trung bình của chỉ tiêu X của những sản phẩm loại B nằm trong khoảng từ 13,83cm đến 16,41cm.

e) Hãy ước lượng tỉ lệ những sản phẩm loại B với độ tin cậy 92%. Bảng số liệu trên được chọn ngẫu nhiên từ một kho trong đó có 1000 sản phẩm loại B. Hãy ước lượng số sản phẩm trong kho với độ tin cậy 92%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các sản phẩm loại B với độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 92\% = 0,92$. Ta có công thức ước lượng khoảng :

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,92/2 = 0,46$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,75$. Mặt khác, trong n =100 sản phẩm có m = 17 sản phẩm loại B nên tỉ lệ mẫu sản phẩm loại B là $F_n = 0,17$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,17 - 1,75\sqrt{\frac{0,17(1-0,17)}{100}}; 0,17 + 1,75\sqrt{\frac{0,17(1-0,17)}{100}}) = (10,43\%; 23,57\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 92%, tỉ lệ sản phẩm loại B nằm trong khoảng từ 10,43% đến 23,57%.

Khi trong kho có 1000 sản phẩm loại B, gọi N là số sản phẩm có trong kho, ta có tỉ lệ sản phẩm loại B là 1000/N. Theo kết quả trên, với độ tin cậy 92%, tỉ lệ các sản phẩm loại B từ 10,43% đến 23,57%, do đó:

$$\begin{aligned} 10,43\% \le \frac{1000}{N} \le 23,57\% &\Leftrightarrow \frac{10,43}{100} \le \frac{1000}{N} \le \frac{23,57}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{100.1000}{23,57} \le N \le \frac{100.1000}{10,430} \\ &\Leftrightarrow 4242,68 \le N \le 9587,73 \\ &\Leftrightarrow 4243 \le N \le 9587 \end{aligned}$$

Vậy với độ tin cậy 92%, ta ước lượng trong kho có từ 4243 đến 9587 sản phẩm.

f) Nếu ước lượng tỉ lệ những sp loại B với độ chính xác 6% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

Đây là bài toán xác định độ tin cậy γ = 1- α khi lượng tỉ lệ các sản phẩm loại B với độ chính xác ε = 6% = 0,06. Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Suy ra:

$$z_\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{F_n(1-F_n)}} = 0,06.\sqrt{\frac{100}{0,17(1-0,17)}} = 1,60.$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(1,60) = 2.0,4452 = 89,04\%.$$

g) Nếu ước lượng tỉ lệ những sản phẩm loại B với độ tin cậy 96% và độ chính xác 8% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

Đây là bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng tỉ lệ các sản phẩm loại B với độ chính xác ε = 8% = 0,08 và độ tin cậy γ = 1- α = 96% = 0,96. Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,96/2 = 0,48$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 2,06. Suy ra

$$n = \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2}$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2,06^2.0,17(1-0,17)}{0,08^2} \approx 93,56.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thoả bất đẳng thức trên là n_1 = 94. Vì n_1 = 94 < 100 (100 là cỡ mẫu đang có) nên ta không cần điều tra thêm sản phẩm nữa.

h) Giả sử trong kho để lẫn 1000 sản phẩm của xí nghiệp II và trong 100 sản phẩm lấy từ kho có 9 sản phẩm của xí nghiệp II. Hãy ước lượng số sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho với độ tin cậy 82%.

Trước hết ta ước lượng tỉ lệ sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho với độ tin cậy 82%. Ta có công thức ước lượng khoảng :

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,82/2 = 0,41$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 1,34. Mặt khác, theo giả thiết, trong n =100 sản phẩm có 9 sản phẩm của xí nghiệp II tức là có 91 sản phẩm của xí nghiệp I, nên tỉ lệ mẫu sản phẩm của xí nghiệp I là F_n = 91/100 = 0,91. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,91-1,34\sqrt{\frac{0,91(1-0,91)}{100}}; 0,91+1,34\sqrt{\frac{0,91(1-0,91)}{100}}) = (87,17\%; 94,83\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 92%, tỉ lệ sản phẩm của xí nghiệp I nằm trong khoảng từ 87,17% đến 94,83%.

Bây giờ gọi N là số sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho. Khi đó:

- Tổng số sản phẩm có trong kho là N + 1000.
- Tỉ lệ sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho là N/(N+1000).

Theo kết quả trên, với độ tin cậy 82%, tỉ lệ sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho nằm trong khoảng từ 87,17% đến 94,83%, do đó:

$$\begin{aligned}
87,17\% \leq \frac{N}{N+1000} \leq 94,83\% &\Leftrightarrow 87,17\% \leq \frac{N}{N+1000} \leq 94,83\% \\
&\Leftrightarrow 87,17\% \leq 1-\frac{1000}{N+1000} \leq 94,83\% \\
&\Leftrightarrow 5,17\% \leq \frac{1000}{N+1000} \leq 12,83\% \\
&\Leftrightarrow \frac{1000}{12,83\%}\text{-}1000 \leq N \leq \frac{1000}{5,17\%}\text{-}1000 \\
&\Leftrightarrow 6794,23 \leq N \leq 18342,36 \\
&\Leftrightarrow 6795 \leq N \leq 18342
\end{aligned}$$

Vậy với độ tin cậy 82%, ta ước lượng số sản phẩm của xí nghiệp I có trong kho nằm trong khoảng từ 6795 đến 18342.

Bài 3.4. Để khảo sát chiều cao X của một giống cây trồng, người ta quan sát một mẫu và có kết qủa sau:

X(cm)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155	155-165
Số cây	10	10	15	30	10	10	15

a) Ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ tin cậy 96%.

b) Nếu muốn ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ tin cậy 99% và độ chính xác 4 cm thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu cây nữa?

c) Nếu ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ chính xác 4,58cm thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

d) Những cây trồng có chiều cao từ 135cm trở lên được gọi là những cây "cao". Hãy ước lượng tỉ lệ những cây "cao"với độ tin cậy 95%.
e) Nếu ước lượng tỉ lệ những những cây "cao" với độ chính xác 10% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?
f) Nếu ước lượng tỉ lệ những những cây "cao" với độ tin cậy 95% và độ chính xác 11% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu cây nữa?
g) Ước lượng chiều cao trung bình của các cây cao của giống cây trồng trên với độ tin cậy 94%.

Lời giải

Ta có:

$$n=100;\ \sum X_i n_i = 13100;\ \sum X_i^2 n_i = 1749000.$$

- Kỳ vọng mẫu của X là $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i = 131(\text{cm}).$
- Phương sai mẫu của X là:
$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_i - \overline{X}^2 = (18,1384)^2(\text{cm}^2).$$
- Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là:
$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2 = (18,2297)^2(\text{cm}^2).$$

a) Ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ tin cậy 96%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 96\% = 0,96$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,96/2 = 0,48$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,06$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(131 - 2,06\frac{18,2297}{\sqrt{100}}; 131 + 2,06\frac{18,2297}{\sqrt{100}}) = (127,2447; 134,7553).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 96%, chiều cao trung bình của một cây nằm trong khoảng từ 127,2447cm đến 134,7553cm.

b) Nếu muốn ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ tin cậy 99% và độ chính xác 4cm thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu cây nữa?

Đây là bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu X với độ chính xác $\varepsilon = 4$cm và độ tin cậy $\gamma = 99\% = 0,99$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,99/2 = 0,495$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,58$. Suy ra

$$n = \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2.$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \geq \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{2,58.18,2297}{4}\right)^2 \approx 138,254.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thỏa bất đẳng thức trên là $n_1 = 139$. Vì $n_1 = 139 > 100$ (100 là cỡ mẫu đang có) nên ta cần điều tra thêm ít nhất là $139 - 100 = 39$ cây nữa.

c) Nếu ước lượng chiều cao trung bình của giống cây trồng trên với độ chính xác 4,58cm thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

Đây là bài toán xác định độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha$ khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu X với độ chính xác $\varepsilon = 4,58$cm.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Suy ra

$$z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S} = \frac{4,58.\sqrt{100}}{18,2297} = 2,5123.$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là

$$\gamma = 2\varphi(z_\gamma) = 2\varphi(2,5123) = 2\varphi(2,52) = 2.0,4941 = 98,82\%.$$

d) Những cây trồng có chiều cao từ 135cm trở lên được gọi là những cây "cao". Hãy ước lượng tỉ lệ những cây "cao"với độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các cây cao với độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 95\% = 0,95$. Ta có công thức ước lượng khoảng :

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0{,}95/2 = 0{,}475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1{,}96$. Trong $n = 100$ cây có $m = 10 + 10 + 15 = 35$ cây có chiều cao từ 135cm trở lên nên tỉ lệ mẫu các cây cao là $F_n = 35/100 = 0{,}35$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,35 - 1,96\sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{100}}; 0,35 + 1,96\sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{100}}) = (25,65\%; 44,35\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ cây cao nằm trong khoảng từ 25,65% đến 44,35%.

e) Nếu ước lượng tỉ lệ những những cây "cao" với độ chính xác 10% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

Đây là bài toán xác định độ tin cậy khi lượng tỉ lệ cây cao với độ chính xác $\varepsilon = 10\% = 0{,}1$.

Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Ta có tỉ lệ mẫu cây cao là: $F_n = 0{,}35$. Suy ra

$$z_\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{F_n(1-F_n)}} = 0,1.\sqrt{\frac{100}{0,35(1-0,35)}} = 2,0966.$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(2,0966) = 2\varphi(2,1) = 2.0,4821 = 96,42\%.$$

f) Nếu ước lượng tỉ lệ những những cây "cao" với độ tin cậy 95% và độ chính xác 11% thì cần phải điều tra thêm bao nhiêu cây nữa?

Đây là bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng tỉ lệ cây cao với độ chính xác $\varepsilon = 11\% = 0{,}11$ và độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 95\% = 0{,}95$.

Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0{,}95/2 = 0{,}475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1{,}96$. Suy ra

$$n = \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2}.$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \ge \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1,96^2.0,35(1-0,35)}{0,11^2} \approx 72,23.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thoả bất đẳng thức trên là $n_1 = 73$. Vì $n_1 = 73 < 100$ (100 là cỡ mẫu đang có) nên ta không cần điều tra thêm cây nào nữa.

g) Ước lượng chiều cao trung bình của các cây cao của giống cây trồng trên với độ tin cậy 94%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu_C = M(X_C)$ của chỉ tiêu $X = X_C$ của những cây cao với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha = 94\% = 0{,}94$. Ta lập bảng số liệu của X_C:

X_{Ci}	140	150	160
n_{Ci}	10	10	15

Từ bảng trên ta tính được:

$$n_C = 35;\ \sum X_{Ci}n_{Ci} = 5300;\ \sum X_{Ci}^2 n_{Ci} = 805000.$$

- Kỳ vọng mẫu của X_C là:

$$\bar{X}_C = \frac{1}{n}\sum X_{Ci}n_{Ci} = 151,4286(\text{cm}).$$

- Phương sai mẫu của X_C là:

$$\hat{S}_C^2 = \frac{1}{n}\sum X_{Ci}^2 n_{Ci} - \bar{X}_C^2 = (8,3299)^2(\text{cm}^2).$$

- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của X_C là:

$$S_C^2 = \frac{n_C}{n_C - 1}\hat{S}_C^2 = (8,4515)^2\ (\text{cm}^2).$$

Vì $n_C = 35 > 30$, $\sigma^2_C = D(X_C)$ chưa biết, nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\bar{X}_C - z_\alpha\frac{S_C}{\sqrt{n_C}}; \bar{X}_C + z_\alpha\frac{S_C}{\sqrt{n_C}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0{,}94/2 = 0{,}47$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1{,}88$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(151,4286 - 1,88\frac{8,4515}{\sqrt{35}}; 151,4286 + 1,88\frac{8,4515}{\sqrt{35}}) = (148,74; 154,11).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 94%, chiều cao trung bình của cây cao nằm trong khoảng từ 148,74cm đến 154,11cm.

Bài 3.5. Trái cây của một chủ hàng được đựng trong các sọt, mỗi sọt 100 trái. Người ta kiểm tra 50 sọt thì thấy có 450 trái không đạt tiêu chuẩn.

a) Ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn của lô hàng trên với độ tin cậy 95%.

b) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn với độ chính xác 0,5% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

c) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn với độ chính xác 1% và độ tin cậy 99% thì phải điều tra thêm ít nhất bao nhiêu sọt nữa?

Lời giải

Số trái trong 100 sọt là 50×100 = 5000. Do đó:

- Cỡ mẫu $n = 5000$.
- Số trái không đạt tiêu chuẩn là: $m = 450$.
- Tỉ lệ mẫu các trái không đạt tiêu chuẩn là:

$$F_n = m/n = 450/5000 = 0{,}09.$$

a) Ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn của lô hàng trên với độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các trái không đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 95\% = 0{,}95$.

Ta có công thức ước lượng khoảng:

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = \gamma/2 = 0{,}95/2 = 0{,}475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1{,}96$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0{,}09 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{5000}}; 0{,}09 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{5000}}) = (8{,}21\%; 9{,}79\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn từ 8,21% đến 9,79%.

b) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn với độ chính xác 0,5% thì sẽ đạt được độ tin cậy là bao nhiêu?

Yêu cầu của bài tóan: Xác định độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha$.

Giả thiết: - Ước khỏang cho tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn.
- Độ chính xác $\varepsilon = 0{,}5\% = 0{,}005$.

Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Suy ra

$$z_\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{F_n(1-F_n)}} = 0{,}005.\sqrt{\frac{5000}{0{,}09(1-0{,}09)}} = 1{,}24.$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là:

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(1{,}24) = 2.0{,}3925 = 79{,}5\%.$$

Vậy độ tin cậy đạt được là 79,5%.

c) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn với độ chính xác 1% và độ tin cậy 99% thì phải điều tra thêm ít nhất bao nhiêu sọt nữa?

Yêu cầu của bài tóan: Xác định cỡ mẫu.

Giả thiết: - Ước khỏang cho tỉ lệ trái không đạt tiêu chuẩn.
- Độ chính xác $\varepsilon = 1\% = 0{,}01$.
- Độ tin cậy $\gamma = 1- \alpha = 99\% = 0{,}99$.

Ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = 0{,}99/2 = 0{,}495$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2{,}58$. Suy ra

$$n = \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2}$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \ge \frac{z_\alpha^2 F_n(1-F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2{,}58^2.0{,}09(1-0{,}09)}{0{,}01^2} \approx 5451{,}6.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thoả bất đẳng thức trên là $n_1 = 5452$.

Vì $n_1 = 5452 > 5000$ (5000 là cỡ mẫu đang có) nên ta cần điều tra thêm ít nhất là 5452 – 5000 = 452 trái, nghĩa là khoảng 5 sọt nữa.

Bài 3.6. Để nghiên cứu nhu cầu của một loại hàng ở một khu vực, người ta khảo sát 400 hộ gia đình. Kết quả như sau:

Nhu cầu (kg/tháng/hộ)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8
Số hộ	10	35	86	132	78	31	18	10

Cho biết trong khu vực có 4000 hộ.

a) Ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm với độ tin cậy 95%.

b) Khi ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm, nếu ta muốn đạt được độ tin cậy 99% và độ chính xác là 4,8tấn thì cần khảo sát ở ít nhất bao nhiêu hộ gia đình?

Lời giải

Gọi X(kg) là nhu cầu của một hộ về loại hàng trên trong một tháng. Ta có:

Xi	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
ni	10	35	86	132	78	31	18	10

$$n = 400;\ \sum X_i n_i = 1448;\ \sum X_i^2 n_i = 6076.$$

- Kỳ vọng mẫu của X là $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_i = 3,62.$
- Phương sai mẫu của X là:
$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_i - \bar{X}^2 = (1,4442)^2.$$
- Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là:
$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}^2 = (1,4460)^2.$$

a) Ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm với độ tin cậy 95%.

Trước hết ta ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của một hộ trong khu vực trong một tháng với độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 95\% = 0,95$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\bar{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,96$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(3,62 - 1,96\frac{1,4460}{\sqrt{400}}; 3,62 + 1,96\frac{1,4460}{\sqrt{400}}) = (3,4783; 3,7617).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, nhu cầu trung bình về mặt hàng này của một hộ trong khu vực trong một tháng nằm trong khoảng từ 3,4783kg đến 3,7617kg. Xét 4000 hộ trong một năm 12 tháng, ta có các nhu cầu tương ứng là:

$$3,4783\times4000\times12 = 166958,4\text{kg} = 166,9584\text{tấn};$$
$$3,7617\times4000\times12 = 180561,6\text{kg} = 180,5616\text{tấn}.$$

Kết luận: Với độ tin cậy 95%, nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm nằm trong khoảng từ 166,9584tấn đến 180,5616tấn.

b) Khi ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm, nếu ta muốn đạt được độ tin cậy 99% và độ chính xác là 4,8tấn thì cần khảo sát ở ít nhất bao nhiêu hộ gia đình?

Khi ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm với độ tin cậy 99% và độ chính xác là 4,8 tấn= 4800kg, nghĩa là ta ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của một hộ

trong một tháng với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 0,99$ và độ chính xác $\varepsilon = 4800/(4000\times12) = 0,1$kg. Như vậy, ta đưa về bài toán xác định cỡ mẫu khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu X với độ chính xác $\varepsilon = 0,1$ và độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 99\% = 0,99$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,99/2 = 0,495$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 2,58$. Suy ra

$$n = \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2.$$

Thực tế yêu cầu:

$$n \geq \left(\frac{z_\alpha S}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{2,58\times1,4460}{0,1}\right)^2 \approx 1391,8.$$

Giá trị n nguyên nhỏ nhất thỏa bất đẳng thức trên là $n_1 = 1392$. Vậy cần khảo sát ít nhất là 1392 hộ gia đình.

Bài 3.7. Để biết số lượng cá trong hồ lớn người ta bắt lên 2000 con đánh dấu xong rồi thả chúng xuống hồ. Sau đó người ta bắt lên 400 con và thấy có 80 con được đánh dấu.

a) Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng số cá có trong hồ.
b) Ước lượng số cá tối đa có trong hồ với độ tin cậy 96%.
c) Ước lượng số cá tối thiểu có trong hồ với độ tin cậy 94%.

Lời giải

Gọi N là số cá có trong hồ. Khi đó tỉ lệ cá được đánh dấu có trong hồ là $p = 2000/N$.

Với mẫu thu được, ta có:

- Cỡ mẫu $n = 400$.
- Số con được đánh dấu trong mẫu là: $m = 80$.
- Tỉ lệ mẫu con được đánh dấu là:
$$F_n = m/n = 80/400 = 0,2.$$

a) Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng số cá có trong hồ.

Trước hết ta ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các con được đánh dấu với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 95\% = 0,95$.

Ta có công thức ước lượng khoảng:

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,96$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}}; 0,2 + 1,96\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}}) = (16,08\%; 23,92\%)$$

Như vậy, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ con được đánh dấu nằm trong khoảng từ 16,08% đến 23,92%, do đó:

$$16,08\% \le \frac{2000}{N} \le 23,92\% \Leftrightarrow \frac{2000}{23,92\%} \le N \le \frac{2000}{16,08\%}$$

$$\Leftrightarrow 8361,20 \le N \le 12437,81$$

$$\Leftrightarrow 8362 \le N \le 12437$$

Vậy với độ tin cậy 95%, ta ước lượng số cá có trong hồ khoảng từ 8362 đến 12437 con.

b) Ước lượng số cá tối đa có trong hồ với độ tin cậy 96%.

Số cá tối đa có trong hồ tương ứng với giá trị tối thiểu của tỉ lệ con được đánh dấu. Do đó trước hết ta ước lượng khoảng bên phải cho tỉ lệ p các con được đánh dấu với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 96\% = 0,96$ ($\alpha = 0,04$).

Ta có công thức ước lượng khoảng bên phải:

$$(F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; +\infty)$$

trong đó $\varphi(z_{2\alpha}) = (1-2\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,92/2 = 0,46$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_{2\alpha} = 1,75$. Suy ra giá trị tối thiểu của tỉ lệ con được đánh dấu là:

$$F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,2 - 1,75\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}} = 0,165.$$

Như vậy, với độ tin cậy 96%, ta có

$$\frac{2000}{N} \ge 0,165 \Leftrightarrow N \le \frac{2000}{0,165} = 12121,2$$

Vậy với độ tin cậy 96%, số cá tối đa có trong hồ là 12121.

c) Ước lượng số cá tối thiểu có trong hồ với độ tin cậy 94%.

Số cá tối thiểu có trong hồ tương ứng với giá trị tối đa của tỉ lệ con được đánh dấu. Do đó trước hết ta ước lượng khoảng bên trái cho tỉ lệ p các con được đánh dấu với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 94\% = 0,94$ ($\alpha = 0,06$).

Ta có công thức ước lượng khoảng bên trái:

$$(-\infty; F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_{2\alpha}) = (1-2\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,88/2 = 0,44$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_{2\alpha} = 1,56$. Suy ra giá trị tối đa của tỉ lệ con được đánh dấu là:

$$F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,2 + 1,56\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{400}} = 0,2312.$$

Như vậy, với độ tin cậy 94%, ta có

$$\frac{2000}{N} \le 0,2312 \Leftrightarrow N \ge \frac{2000}{0,2312} = 8650,5$$

Vậy với độ tin cậy 94%, số cá tối thiểu có trong hồ là 8651.

Bài 3.8. Trước kỳ bầu cử tổng thống người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 1800 cử tri thì thấy có 1180 người ủng hộ cử tri A. Với độ tin cậy 99%, hỏi ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm số phiếu bầu? Và tối đa là bao nhiêu?

Lời giải

Với mẫu thu được, ta có:

- Cỡ mẫu $n = 1800$.
- Số người ủng hộ ứng cử viên A là $m = 1180$.
- Tỉ lệ mẫu số người ủng hộ là:

$$F_n = m/n = 1180/1800 = 0.6556.$$

Với độ tin cậy 99%, để biết ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm số phiếu bầu ta cần ước lượng khoảng bên phải cho tỉ lệ p những người ủng hộ với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 99\% = 0,99$ ($\alpha = 0,01$).

Ta có công thức ước lượng khoảng bên phải:

$$(F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; +\infty)$$

trong đó $\varphi(z_{2\alpha}) = (1-2\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,98/2 = 0,49$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_{2\alpha} = 2,33$. Suy ra giá trị tối thiểu của tỉ lệ người ủng hộ là:

$$F_n - z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,6556 - 2,33\sqrt{\frac{0,6556(1-0,6556)}{1800}} = 0,6295.$$

Như vậy, với độ tin cậy 99%, ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu là 62,95% số phiếu bầu.

Với độ tin cậy 99%, để biết ứng cử viên A có thể thu được tối đa bao nhiêu phần trăm số phiếu bầu ta cần ước lượng khoảng bên trái cho tỉ lệ p những người ủng hộ với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 99\% = 0,99$ ($\alpha = 0,01$).

Ta có công thức ước lượng khoảng bên trái:

$$(-\infty; F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}),$$

trong đó $z_{2\alpha}$ = 2,33. Suy ra giá trị tối đa của tỉ lệ người ủng hộ là:

$$F_n + z_{2\alpha}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} = 0,6556 + 2,33\sqrt{\frac{0,6556(1-0,6556)}{1800}} = 0,6817.$$

Như vậy, với độ tin cậy 99%, ứng cử viên A có thể thu được tối đa là 68,17% số phiếu bầu.

Bài 3.9. Khảo sát thu nhập và tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục ở 350 hộ gia đình, ta thu được các số liệu ở bảng sau:

X / Y	10	20	30	40	50
150 - 250	10	40	20		
250 - 350		40	60	20	
350 - 450		20	30	40	
450 - 550			30	30	10

trong đó : X là tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục (tính theo %)

Y là thu nhập bình quân 1 người/tháng của một hộ (đơn vị tính ngàn đồng).

a) Ước lượng giá trị trung bình của tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục của một hộ gia đình với độ tin cậy 95% .

b) Những gia đình có thu nhập bình quân người trên 450 là hộ có thu nhập cao. Ước lượng tỷ lệ hộ có thu nhập cao với độ tin cậy 97%.

c) Để ước lượng giá trị trung bình của tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục với độ chính xác ε = 0,8% thì đảm bảo độ tin cậy là bao nhiêu?

Lời giải

- Cỡ mẫu: n = 350.
- Kỳ vọng mẫu của X là

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i n_{Xi} = 29,7143.$$

- Phương sai mẫu của X là:

$$\hat{S}_X^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 n_{Xi} - \overline{X}^2 = (8,7785)^2.$$

- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của X là:

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}_X^2 = (8,7910)^2.$$

a) Ước lượng giá trị trung bình của tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục của một hộ gia đình với độ tin cậy 95% .

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu = M(X)$ với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 95\% = 0,95$.

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{X} - z_\alpha\frac{S_X}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_\alpha\frac{S_X}{\sqrt{n}}),$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 1,96. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(29,7143 - 1,96\frac{8,7910}{\sqrt{350}}; 29,7143 + 1,96\frac{8,7910}{\sqrt{350}}) = (28,7933;30,6353).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, giá trị trung bình của tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục của một hộ gia đình từ 28,7933% đến 30,6353%.

b) Những gia đình có thu nhập bình quân người trên 450 là hộ có thu nhập cao. Ước lượng tỷ lệ hộ có thu nhập cao với độ tin cậy 97%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các hộ có thu nhập cao với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 97\% = 0,97$.

Ta có công thức ước lượng khoảng :

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = \gamma/2 = 0,97/2 = 0,485$.

- Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được z_α = 2,17.
- Cỡ mẫu n = 350.
- Trong n = 350 hộ có m = 30 + 30 + 10 = 70 hộ có thu nhập bình quân người trên 450 nên có m = 70 hộ có thu nhập cao. Do đó tỉ lệ mẫu hộ có thu nhập cao là:

$$F_n = m/n = 70/350 = 0,2.$$

Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,2 - 2,17\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{350}}; 0,2 + 2,17\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{350}}) = (15,36\%; 24,64\%)..$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 97%, tỉ lệ hộ có thu nhập cao từ 15,36% đến 24,64%.

c) Để ước lượng giá trị trung bình của tỷ lệ thu nhập chi cho giáo dục với độ chính xác ε = 0,8% thì đảm bảo độ tin cậy là bao nhiêu?

Yêu cầu của bài tóan: Xác định độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha$.

Giả thiết: - Ước khỏang cho kỳ vọng của X.

- Độ chính xác $\varepsilon = 0,8$ (%).

Vì $n \geq 30$, $\sigma^2 = D(X)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} ,$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = (1-\alpha)/2 = \gamma/2$. Suy ra

$$z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S} = \frac{0,8.\sqrt{350}}{8,7910} = 1,70$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là:

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(1,70) = 2.0,4554 = 91,08\%.$$

Vậy độ tin cậy đạt được là 91,08%.

Bài 3.10. X(%) và Y(kg/mm^2) là hai chỉ tiêu chất lượng của một loại sản phẩm. Quan sát một số sản phẩm ta có bảng số liệu như sau:

X / Y	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
120	7				
130	12	8	10		
140		20	15	2	
150		19	16	9	5
160				8	3

Sản phẩm có chỉ tiêu $X \geq 15\%$ là loại A.

a) Ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại A độ tin cậy 95%.

b) Ước lượng giá trị trung bình chỉ tiêu Y của những sản phẩm loại A với độ tin cậy 95% (Giả sử Y có phân phối chuẩn).

c) Nếu muốn ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu Y với độ chính xác 1,6 kg/mm^2 thì sẽ đảm bảo được độ tin cậy là bao nhiêu?

Lời giải

a) Ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại A độ tin cậy 95%.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho tỉ lệ p các sản phẩm loại A với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 95\% = 0,95$.

Từ bảng số liệu đã cho ta tính được:

- Cỡ mẫu: n = 134.
- Trong n = 134 sản phẩm có m = 2 + 9 + 8 + 5 + 3 = 27 sản phẩm có chỉ tiêu $X \geq 15\%$ nên có m = 27 sản phẩm loại A. Do đó tỉ lệ mẫu sản phẩm loại A là:

$$F_n = m/n = 27/134 = 0,2015.$$

Ta có công thức ước lượng khoảng:

$$(F_n - z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + z_\alpha\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}})$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $z_\alpha = 1,96$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(0,2015 - 1,96\sqrt{\frac{0,2015(1-0,2015)}{134}}; 0,2015 + 1,96\sqrt{\frac{0,2015(1-0,2015)}{134}})$$

$$= (0,1336; 0,2694) = (13,36\%; 26,94\%).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, tỉ lệ sản phẩm loại A từ 13,36% đến 26,94%.

b) Ước lượng giá trị trung bình chỉ tiêu Y của những sản phẩm loại A với độ tin cậy 95% (Giả sử Y có phân phối chuẩn).

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng $\mu_{YA} = M(Y_A)$ của chỉ tiêu $Y = Y_A$ của những sản phẩm loại A với độ tin cậy $\gamma = 1-\alpha = 95\% = 0,95$.

Ta lập bảng số liệu của Y_A:

Y_{Ai}	140	150	160
n_{Ai}	2	14	11

Từ bảng trên ta tính được:

$$n_A = 27; \sum Y_{Ai}n_{Ai} = 4140; \sum Y_{Ai}^2 n_{Ai} = 635800.$$

- Kỳ vọng mẫu của Y_A là

$$\overline{Y}_A = \frac{1}{n}\sum Y_{Ai}n_{Ai} = 153,3333.$$

- Phương sai mẫu của Y_A là:

$$\hat{S}_{YA}^2 = \frac{1}{n}\sum Y_{Ai}^2 n_{Ai} - \overline{Y}_A^2 = (6,0858)^2.$$

- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của Y_A là:

$$S_{YA}^2 = \frac{n_A}{n_A - 1}\hat{S}_{YA}^2 = (6,2017)^2.$$

Vì $n_A < 30$, Y_A có phân phối chuẩn, $\sigma^2_{YA} = D(X_A)$ chưa biết, nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

$$(\overline{Y}_A - t_\alpha^k \frac{S_{YA}}{\sqrt{n_A}}; \overline{Y}_A + t_\alpha^k \frac{S_{YA}}{\sqrt{n_A}}),$$

trong đó t_α^k được xác định từ bảng phân phối Student với $k = n_A - 1 = 26$ và $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Tra bảng phân phối Student ta được $t_\alpha^k = 2{,}056$. Vậy ước lượng khoảng là:

$$(153{,}3333 - 2{,}056\frac{6{,}2017}{\sqrt{27}}; 153{,}3333 + 2{,}056\frac{6{,}2017}{\sqrt{27}}) = (150{,}8794; 155{,}7872).$$

Nói cách khác, với độ tin cậy 95%, giá trị trung bình của chỉ tiêu Y của những sản phẩm loại A từ 150,8794kg/mm^2 đến 155,7872kg/mm^2.

c) Nếu muốn ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu Y với độ chính xác 1,6 kg/mm^2 thì sẽ đảm bảo được độ tin cậy là bao nhiêu?

Đây là bài toán xác định độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ khi ước lượng kỳ vọng của chỉ tiêu Y với độ chính xác $\varepsilon = 1{,}6$kg/mm^2.

Từ bảng số liệu đã cho ta tính được:

- Cỡ mẫu: $n = 134$.
- Kỳ vọng mẫu của Y là

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_j n_{Yj} = 142{,}0149.$$

- Phương sai mẫu của Y là:

$$\hat{S}_Y^2 = \frac{1}{n}\sum Y_i^2 n_{Yi} - \overline{Y}^2 = (10{,}4224)^2.$$

- Phương sai mẫu đã hiệu chỉnh của Y là:

$$S_Y^2 = \frac{n}{n-1}\hat{S}_Y^2 = (10{,}4615)^2.$$

Vì $n \ge 30$, $\sigma^2_Y = D(Y)$ chưa biết nên ta có công thức tính độ chính xác của ước lượng:

$$\varepsilon = z_\alpha \frac{S_Y}{\sqrt{n}},$$

trong đó $\varphi(z_\alpha) = \gamma/2$. Suy ra

$$z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{S_Y} = \frac{1{,}6.\sqrt{134}}{10{,}4615} = 1{,}77$$

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được độ tin cậy là:

$$\gamma = 2\varphi(z_\alpha) = 2\varphi(1{,}77) \approx 2.0{,}4646 = 92{,}92\%.$$

Vậy độ tin cậy đạt được là 92,92%.
