BÀI GIẢI
XÁC SUẤT THỐNG KÊ
(GV: Trần Ngọc Hội – 2009)

CHƯƠNG 1
NHỮNG ĐỊNH LÝ CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

Bài 1.1: Có ba khẩu súng I, II và III bắn độc lập vào một mục tiêu. Mỗi khẩu bắn 1 viên. Xác suất bắn trúng mục tiêu của ba khẩu I, II và III lần lượt là 0,7; 0,8 và 0,5. Tính xác suất để
a) có 1 khẩu bắn trúng.
b) có 2 khẩu bắn trúng.
c) có 3 khẩu bắn trúng.
d) ít nhất 1 khẩu bắn trúng.
e) khẩu thứ 2 bắn trúng biết rằng có 2 khẩu trúng.

Lời giải

Tóm tắt:

Khẩu súng	I	II	III
Xác suất trúng	0,7	0,8	0,5

Gọi A_j (j = 1, 2, 3) là biến cố khẩu thứ j bắn trúng. Khi đó A_1, A_2, A_3 độc lập và giả thiết cho ta:

$$P(A_1) = 0,7; P(\bar{A}_1) = 0,3;$$
$$P(A_2) = 0,8; P(\bar{A}_2) = 0,2;$$
$$P(A_3) = 0,5; P(\bar{A}_3) = 0,5.$$

a) Gọi A là biến cố có 1 khẩu trúng. Ta có

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

Vì các biến cố $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3, \bar{A}_1A_2\bar{A}_3, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ xung khắc từng đôi, nên theo công thức Cộng xác suất ta có

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$
$$= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

Vì các biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập nên theo công thức Nhân xác suất ta có

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,7.0,2.0,5 = 0,07;$$
$$P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = 0,3.0,8.0,5 = 0,12;$$
$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,3.0,2.0,5 = 0,03.$$

Suy ra P(A) = 0,22.

b) Gọi B là biến cố có 2 khẩu trúng. Ta có

$$B = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3$$

Tính toán tương tự câu a) ta được P(B) = 0,47.

c) Gọi C là biến cố có 3 khẩu trúng. Ta có

$$C = A_1A_2A_3.$$

Tính toán tương tự câu a) ta được P(C) = 0,28.

d) Gọi D là biến cố có ít nhất 1 khẩu trúng. Ta có

$$D = A + B + C.$$

Chú ý rằng do A, B, C xung khắc từng đôi, nên theo công thức Cộng xác suất ta có:

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,22 + 0,47 + 0,28 = 0,97.$$

e) Gỉa sử có 2 khẩu trúng. Khi đó biến cố B đã xảy ra. Do đó xác suất để khẩu thứ 2 trúng trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(A_2/B)$.

Theo công thức Nhân xác suất ta có:

$$P(A_2B) = P(B)P(A_2/B)$$

Suy ra

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)}.$$

Mà $A_2B = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3$ nên lý luận tương tự như trên ta được

$$P(A_2B)=0,4$$

Suy ra $P(A_2/B)$ =0,851.

Bài 1.2: Có hai hộp I và II mỗi hộp chứa 10 bi, trong đó hộp I gồm 9 bi đỏ, 1 bi trắng; hộp II gồm 6 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 bi.
a) Tính xác suất để được 4 bi đỏ.
b) Tính xác suất để được 2 bi đỏ và 2 bi trắng.
c) Tính xác suất để được 3 bi đỏ và 1 bi trắng.
d) Giả sử đã lấy được 3 bi đỏ và 1 bi trắng. Hãy tìm xác suất để bi trắng có được của hộp I.

Lời giải

Gọi A_i, B_i (i = 0, 1, 2) lần lượt là các biến cố có i bi đỏ và (2 - i) bi trắng có trong 2 bi được chọn ra từ hộp I, hộp II.

Khi đó

- A_0, A_1, A_2 xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_0) = 0;$$

$$P(A_1) = \frac{C_9^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{9}{45};$$

$$P(A_2) = \frac{C_9^2 C_1^0}{C_{10}^2} = \frac{36}{45}.$$

- B_0, B_1, B_2 xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(B_0) = \frac{C_6^0 C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45};$$

$$P(B_1) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45};$$

$$P(B_2) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}.$$

- A_i và B_j độc lập.
- Tổng số bi đỏ có trong 4 bi chọn ra phụ thuộc vào các biến cố A_i và B_j theo bảng sau:

	B_0	B_1	B_2
A_0	0	1	2
A_1	1	2	3
A_2	2	3	4

a) Gọi A là biến cố chọn được 4 bi đỏ. Ta có:

$$A = A_2 B_2.$$

Từ đây, do tính độc lập, Công thức nhân xác suất thứ nhất cho ta:

$$P(A) = P(A_2)P(B_2) = \frac{36}{45}.\frac{15}{45} = 0,2667.$$

b) Gọi B là biến cố chọn được 2 bi đỏ và 2 bi trắng. Ta có:

$$B = A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0$$

Do tính xung khắc từng đôi của các biến cố A_0B_2, A_1B_1, A_2B_0, công thức Cộng xác suất cho ta:

$$P(B) = P(A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0) = P(A_0B_2) + P(A_1B_1) + P(A_2B_0)$$

Từ đây, do tính độc lập, Công thức nhân xác suất thứ nhất cho ta:

$$P(B) = P(A_0)P(B_2) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_0) = 0,2133.$$

c) Gọi C là biến cố chọn được 3 bi đỏ và 1 bi trắng. Ta có:

$$C = A_1B_2 + A_2B_1.$$

Lý luận tương tự như trên ta được

$$P(C) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) = 0,4933.$$

d) Giả sử đã chọn được 3 bi đỏ và 1 bi trắng. Khi đó biến cố C đã xảy ra. Do đó xác suất để bi trắng có được thuộc hộp I trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(A_1/C)$. Theo Công thức nhân xác suất, ta có

$$P(A_1C) = P(C)P(A_1/C).$$

Suy ra

$$P(A_1/C) = \frac{P(A_1C)}{P(C)}.$$

Mà $A_1C = A_1B_2$ nên

$$P(A_1C) = P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2) = \frac{9}{45}.\frac{15}{45} = 0,0667.$$

Do đó xác suất cần tìm là: $P(A_1/C) = 0,1352$.

Bài 1.3: Một lô hàng chứa 10 sản phẩm gồm 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu. Khách hàng kiểm tra bằng cách lấy ra từng sản phẩm cho đến khi nào được 3 sản phẩm tốt thì dừng lại.

a) Tính xác suất để khách hàng dừng lại ở lần kiểm tra thứ 3.

b) Tính xác suất để khách hàng dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4.

b) Giả sử khách hàng đã dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4. Tính xác suất để ở lần kiểm tra thứ 3 khách hàng gặp sản phẩm xấu.

Lời giải

Gọi T_i, X_i lần lượt là các biến cố chọn được sản phẩm tốt, xấu ở lần kiểm tra thứ i.

a) Gọi A là biến cố khách hàng dừng lại ở lần kiểm tra thứ 3. Ta có:

$$A = T_1T_2T_3.$$

Suy ra $P(A) = P(T_1T_2T_3) = P(T_1)\,P(T_2/T_1)\,P(T_3/T_1T_2)$
$= (6/10)(5/9)(4/8) = 0{,}1667.$

b) Gọi B là biến cố khách hàng dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4. Ta có:

$$B = X_1T_2T_3T_4 + T_1X_2T_3T_4 + T_1T_2X_3T_4\,.$$

Suy ra

$P(B) = P(X_1T_2T_3T_4) + P(T_1X_2T_3T_4) + P(T_1T_2X_3T_4)$
$= P(X_1)\,P(T_2/X_1)\,P(T_3/X_1T_2)\,P(T_4/X_1T_2T_3)$
$+ P(T_1)\,P(X_2/T_1)\,P(T_3/T_1X_2)\,P(T_4/T_1X_2T_3)$
$+ P(T_1)\,P(T_2/T_1)\,P(X_3/T_1T_2)\,P(T_4/T_1T_2X_3)$
$= (4/10)(6/9)(5/8)(4/7) + (6/10)(4/9)(5/8)(4/7)+(6/10)(5/9)(4/8)(4/7)$
$= 3(4/10)(6/9)(5/8)(4/7) = 0{,}2857.$

c) Giả sử khách hàng đã dừng lại ở lần kiểm tra thứ 4. Khi đó biến cố B đã xảy ra. Do đó xác suất để ở lần kiểm tra thứ 3 khách hàng gặp sản phẩm xấu trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(X_3/B)$.

Theo Công thức nhân xác suất , ta có

$$P(X_3B) = P(B)P(X_3/B)\,.$$

Suy ra

$$P(X_3/B) = \frac{P(X_3B)}{P(B)}\,.$$

Mà $X_3B = T_1T_2X_3T_4$ nên

$P(X_3B) = P(T_1T_2X_3T_4) = P(T_1)\,P(T_2/T_1)\,P(X_3/T_1T_2)\,P(T_4/T_1T_2X_3)$
$= (6/10)(5/9)(4/8)(4/7) = 0{,}0952.$

Suy ra $P(X_3/B) = 0{,}3333.$

Bài 1.4: Một hộp bi gồm 5 bi đỏ, 4 bi trắng và 3 bi xanh có cùng cỡ. Từ hộp ta rút ngẫu nhiên không hòan lại từng bi một cho đến khi được bi đỏ thì dừng lại. Tính xác suất để

a) được 2 bi trắng, 1 bi xanh và 1 bi đỏ.

b) không có bi trắng nào được rút ra.

Lời giải

Gọi D_i, T_i, X_i lần lượt là các biến cố chọn được bi đỏ, bi trắng, bi xanh ở lần rút thứ i.

a) Gọi A là biến cố rút được 2 bi trắng, 1 bi xanh và 1 bi đỏ. Ta có:

$$A \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \text{Rút được} \left[\begin{array}{l} T-T-X-D \\ T-X-T-D \\ X-T-T-D \end{array}\right.$$

Suy ra

$$A = T_1T_2X_3D_4 + T_1X_2T_3D_4 + X_1T_2T_3D_4$$

Từ đây, do tính xung khắc từng đôi của các biến cố thành phần, ta có:

$$P(A) = P(T_1T_2X_3D_4)+ P(T_1X_2T_3D_4) + P(X_1T_2T_3D_4)$$

Theo Công thức Nhân xác suất, ta có

$P(T_1T_2X_3D_4) = P(T_1)P(T_2/T_1)P(X_3/T_1T_2)P(D_4/T_1T_2X_3)$
$= (4/12)(3/11)(3/10)(5/9) = 1/66;$

$P(T_1X_2T_3D_4) = P(T_1)P(X_2/T_1)P(T_3/T_1X_2)P(D_4/T_1X_2T_3)$
$= (4/12)(3/11)(3/10)(5/9) = 1/66;$

$P(X_1T_2T_3D_4) = P(X_1)P(T_2/X_1)P(T_3/X_1T_2)P(D_4/X_1T_2T_3)$
$= (3/12)(4/11)(3/10)(5/9) = 1/66.$

Suy ra $P(A) = 3/66 = 1/22 = 0{,}0455.$

b) Gọi B là biến cố không có bi trắng nào được rút ra. Ta có:

$$B \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \text{Rút được} \left[\begin{array}{l} D \\ X-D \\ X-X-D \\ X-X-X-D \end{array}\right.$$

Suy ra

$$B = D_1 + X_1D_2 + X_1X_2D_3+ X_1X_2X_3D_4$$

Từ đây, do tính xung khắc từng đôi của các biến cố thành phần, ta có:

$$P(B) = P(D_1)+ P(X_1D_2) + P(X_1X_2D_3) + P(X_1X_2X_3D_4)$$

Theo Công thức Nhân xác suất, ta có

$P(B) = P(D_1) + P(X_1)P(D_2/X_1) + P(X_1)P(X_2/X_1)P(D_3/X_1X_2)$

$+ P(X_1)P(X_2/X_1)P(X_3/X_1X_2)P(D_4/X_1X_2X_3)$

$= 5/12 + (3/12)(5/11) + (3/12)(2/11)(5/10) + (3/12)(2/11)(1/10)(5/9)$

$= 5/9$

Bài 1.5: Sản phẩm X bán ra ở thị trường do một nhà máy gồm ba phân xưởng I, II và III sản xuất, trong đó phân xưởng I chiếm 30%; phân xưởng II chiếm 45% và phân xưởng III chiếm 25%. Tỉ lệ sản phẩm loại A do ba phân xưởng I, II và III sản xuất lần lượt là 70%, 50% và 90%.

a) Tính tỉ lệ sản phẩm lọai A nói chung do nhà máy sản xuất.

b) Chọn mua ngẫu nhiên một sản phẩm X ở thị trường. Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Theo bạn, sản phẩm ấy có khả năng do phân xưởng nào sản xuất ra nhiều nhất?

c) Chọn mua ngẫu nhiên 121 sản phẩm X (trong rất nhiều sản phẩm X) ở thị trường.

1) Tính xác suất để có 80 sản phẩm loại A.

2) Tính xác suất để có từ 80 đến 85 sản phẩm loại A.

Lời giải

Tóm tắt:

Phân xưởng	I	II	III
Tỉ lệ sản lượng	30%	45%	25%
Tỉ lệ loại A	70%	50%	90%

a) Để tính tỉ lệ sản phẩm loại A nói chung do nhà máy sản xuất ta chọn mua ngẫu nhiên một sản phẩm ở thị trường. Khi đó tỉ lệ sản phẩm loại A chính là xác suất để sản phẩm đó thuộc loại A.

Gọi B là biến cố sản phẩm chọn mua thuộc loại A.

A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố sản phẩm do phân xưởng I, II, III sản xuất. Khi đó A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và

$P(A_1) = 30\% = 0{,}3$; $P(A_2) = 45\% = 0{,}45$; $P(A_3) = 25\% = 0{,}25$.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

Theo giả thiết,

$P(B/A_1) = 70\% = 0{,}7$; $P(B/A_2) = 50\% = 0{,}5$; $P(B/A_3) = 90\% = 0{,}9$.

Suy ra P(B) = 0,66 = 66%. Vậy tỉ lệ sản phẩm loại A nói chung do nhà máy sản xuất là 66%.

b) Chọn mua ngẫu nhiên một sản phẩm X ở thị trường. Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Theo bạn, sản phẩm ấy có khả năng do phân xưởng nào sản xuất ra nhiều nhất?

Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Khi đó biến cố B đã xảy ra. Do đó, để biết sản phẩm loại A đó có khả năng do phân xưởng nào sản xuất ra nhiều nhất ta cần so sánh các xác suất có điều kiện $P(A_1/B)$, $P(A_2/B)$ và $P(A_3/B)$. Nếu $P(A_i/B)$ là lớn nhất thì sản phẩm ấy có khả năng do phân xưởng thứ i sản xuất ra là nhiều nhất. Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{0,3.0,7}{0,66} = \frac{21}{66};$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{0,45.0,5}{0,66} = \frac{22,5}{66};$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{0,25.0,9}{0,66} = \frac{22,5}{66}.$$

Vì $P(A_2/B) = P(A_3/B) > P(A_1/B)$ nên sản phẩm loại A ấy có khả năng do phân xưởng II hoặc III sản xuất ra là nhiều nhất.

c) Chọn mua ngẫu nhiên 121 sản phẩm X (trong rất nhiều sản phẩm X) ở thị trường.

1) Tính xác suất để có 80 sản phẩm loại A.

2) Tính xác suất để có từ 80 đến 85 sản phẩm loại A.

Áp dụng công thức Bernoulli với n = 121, p = 0,66, ta có:

1) Xác suất để có 80 sản phẩm loại A là

$$P_{121}(80) = C_{121}^{80}p^{80}q^{41} = C_{121}^{80}(0,66)^{80}(0,34)^{41} = 0,076.$$

2) Xác suất để có từ 80 đến 85 sản phẩm loại A là

$$\sum_{k=80}^{85} P_{121}(k) = \sum_{k=80}^{85} C_{121}^{k}p^{k}q^{121-k} = \sum_{k=80}^{85} C_{121}^{k}(0,66)^{k}(0,34)^{121-k} = 0,3925.$$

Bài 1.6: Có ba cửa hàng I, II và III cùng kinh doanh sản phẩm Y. Tỉ lệ sản phẩm loại A trong ba cửa hàng I, II và III lần lượt là 70%, 75% và 50%. Một khách hàng chọn nhẫu nhiên một cửa hàng và từ đó mua một sản phẩm

a) Tính xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A.
b) Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Theo bạn, khả năng người khách hàng ấy đã chọn cửa hàng nào là nhiều nhất?

Lời giải

Tóm tắt:

Cửa hàng	I	II	III
Tỉ lệ loại A	70%	75%	50%

Chọn nhẫu nhiên một cửa hàng và từ đó mua một sản phẩm.

a) Tính xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A.

Gọi B là biến cố sản phẩm chọn mua thuộc loại A.
A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố chọn cửa hàng I, II, III. Khi đó A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

Theo giả thiết,

$$P(B/A_1) = 70\% = 0,7;$$
$$P(B/A_2) = 75\% = 0,75;$$
$$P(B/A_3 = 50\% = 0,5.$$

Suy ra P(B) = 0,65 = 65%. Vậy xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A là 65%.

b) Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Theo bạn, khả năng người khách hàng ấy đã chọn cửa hàng nào là nhiều nhất?

Giả sử đã mua được sản phẩm loại A. Khi đó biến cố B đã xảy ra. Do đó, để biết sản phẩm loại A đó có khả năng khách hàng ấy đã chọn cửa hàng nào là nhiều nhất ta cần so sánh các xác suất có điều kiện $P(A_1/B)$,

$P(A_2/B)$ và $P(A_3/B)$. Nếu $P(A_i/B)$ là lớn nhất thì cửa hàng thứ i có nhiều khả năng được chọn nhất.
Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{(1/3).0,7}{0,65} = \frac{70}{195};$$
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{(1/3).0,75}{0,65} = \frac{75}{195};$$
$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{(1/3).0,5}{0,65} = \frac{50}{195}.$$

Vì $P(A_2/B) > P(A_1/B) > P(A_3/B)$ nên cửa hàng II có nhiều khả năng được chọn nhất.

Bài 1.7: Có hai hộp I và II mỗi hộp chứa 12 bi, trong đó hộp I gồm 8 bi đỏ, 4 bi trắng; hộp II gồm 5 bi đỏ, 7 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp I ba bi rồi bỏ sang hộp II; sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II bốn bi.

a) Tính xác suất để lấy được ba bi đỏ và một bi trắng từ hộp II.
b) Giả sử đã lấy được ba bi đỏ và một bi trắng từ hộp II. Tìm xác suất để trong ba bi lấy được từ hộp I có hai bi đỏ và một bi trắng.

Lời giải

Gọi A là biến cố chọn được 3 bi đỏ và 1 bi trắng từ hộp II.
A_i (i = 0, 1, 2, 3) là biến cố có i bi đỏ và (3-i) bi trắng có trong 3 bi chọn ra từ hộp I. Khi đó A_0, A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_0) = \frac{C_8^0 C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{4}{220};$$
$$P(A_1) = \frac{C_8^1 C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{48}{220};$$
$$P(A_2) = \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{112}{220};$$
$$P(A_3) = \frac{C_8^3 C_4^0}{C_{12}^3} = \frac{56}{220}.$$

a) Tính xác suất để lấy được 3 bi đỏ và 1 bi trắng từ hộp II.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A)=P(A_0)P(A/A_0)+P(A_1)P(A/A_1)+P(A_2)P(A/A_2)+P(A_3)P(A/A_3)$$

Theo công thức tính xác suất lựa chọn, ta có

$$P(A/A_0)=\frac{C_5^3C_{10}^1}{C_{15}^4}=\frac{100}{1365};$$

$$P(A/A_1)=\frac{C_6^3C_9^1}{C_{15}^4}=\frac{180}{1365};$$

$$P(A/A_2)=\frac{C_7^3C_8^1}{C_{15}^4}=\frac{280}{1365};$$

$$P(A/A_3)=\frac{C_8^3C_7^1}{C_{15}^4}=\frac{392}{1365}.$$

Suy ra xác suất cần tìm là $P(A) = 0,2076$.

b) Giả sử đã lấy được 3 bi đỏ và 1 bi trắng từ hộp II. Tìm xác suất để trong 3 bi lấy được từ hộp I có 2 bi đỏ và 1 bi trắng.

Giả sử đã lấy được 3 bi đỏ và 1 bi trắng từ hộp II. Khi đó biến cố A đã xảy ra. Do dó xác suất để trong 3 bi lấy được từ hộp I có 2 bi đỏ và 1 bi trắng trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(A_2/A)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{P(A)}=\frac{\frac{112}{220}\cdot\frac{280}{1365}}{0,2076}=0,5030.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A_2/A) = 0,5030$.

Bài 1.8: Có ba hộp mỗi hộp đựng 5 viên bi trong đó hộp thứ nhất có 1 bi trắng, 4 bi đen; hộp thứ hai có 2 bi trắng, 3 bi đen; hộp thứ ba có 3 bi trắng, 2 bi đen.

a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một bi.
   1) Tính xác suất để được cả 3 bi trắng.
   2) Tính xác suất được 2 bi đen, 1 bi trắng.
   3) Giả sử trong 3 viên lấy ra có đúng 1 bi trắng.Tính xác suất để bi trắng đó là của hộp thứ nhất.

b) Chọn ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên ra 3 bi. Tính xác suất được cả 3 bi đen.

Lời giải

a) Gọi A_j (j = 1, 2, 3) là biến cố lấy được bi trắng từ hộp thứ j. Khi đó A_1, A_2, A_3 độc lập và

$$P(A_1)=\frac{1}{5};\ P(\bar{A}_1)=\frac{4}{5};$$

$$P(A_2)=\frac{2}{5};P(\bar{A}_2)=\frac{3}{5};$$

$$P(A_3)=\frac{3}{5};P(\bar{A}_3)=\frac{2}{5}.$$

1) Gọi A là biến cố lấy được cả 3 bi trắng. Ta có

$$A = A_1A_2A_3.$$

Suy ra $P(A) = P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3) = 0,048$.

2) Gọi B là biến cố lấy 2 bi đen, 1 bi trắng. Ta có

$$B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

Suy ra $P(B) =0,464$.

3) Giả sử trong 3 viên lấy ra có đúng 1 bi trắng. Khi đó biến cố B đã xảy ra. Do đó xác suất để bi trắng đó là của hộp thứ nhất trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(A_1/B)$. Theo công thức Nhân xác suất ta có:

$$P(A_1B) = P(B)P(A_1/B)$$

Suy ra

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)}.$$

Mà $A_1B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ nên lý luận tương tự như trên ta được $P(A_1B) = 0,048$.
Suy ra

$$P(A_1/B) =0,1034 .$$

b) Chọn ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên ra 3 bi. Tính xác suất được cả 3 bi đen.

Gọi A là biến cố lấy được cả 3 bi đen.
A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố chọn được hộp I, II, III. Khi đó A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/ A_2)+ P(A_3)P(A/A_3)$$

Theo công thức xác suất lựa chọn, ta có:

$$P(A/A_1) = \frac{C_1^0 C_4^3}{C_5^3} = \frac{4}{10}; P(A/A_2) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}; P(A/A_3) = 0.$$

Suy ra P(A) = 0,1667.

Bài 1.9: Có 20 hộp sản phẩm cùng loại, mỗi hộp chứa rất nhiều sản phẩm, trong đó có 10 hộp của xí nghiệp I, 6 hộp của xí nghiệp II và 4 hộp của xí nghiệp III. Tỉ lệ sản phẩm tốt của các xí nghiệp lần lượt là 50%, 65% và 75%. Lấy ngẫu nhiên ra một hộp và chọn ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm từ hộp đó.

a) Tính xác suất để trong 3 sản phẩm chọn ra có đúng 2 sản phẩm tốt.

b) Giả sử trong 3 sản phẩm chọn ra có đúng 2 sản phẩm tốt. Tính xác suất để 2 sản phẩm tốt đó của xí nghiệp I.

Lời giải

Gọi A là biến cố trong 3 sản phẩm chọn ra có đúng 2 sản phẩm tốt.

A_j (j = 1, 2, 3) là biến cố chọn được hộp của xí nghiệp thứ j.

Khi đó A_1, A_2, A_3 là một đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_1) = \frac{C_{10}^1}{C_{20}^1} = \frac{10}{20};$$

$$P(A_2) = \frac{C_6^1}{C_{20}^1} = \frac{6}{20};$$

$$P(A_3) = \frac{C_4^1}{C_{20}^1} = \frac{4}{20}.$$

Mặt khác, từ giả thiết, theo công thức Bernoulli, ta có

$$P(A/A_1) = C_3^2(0,5)^2(1-0,5) = 0,375$$

$$P(A/A_2) = C_3^2(0,65)^2(1-0,65) = 0,443625$$

$$P(A/A_3) = C_3^2(0,75)^2(1-0,25) = 0,421875$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3)$

$= (10/20).0,375 + (6/20).\ 0,443625 + (4/20).\ 0,421875 = 0,4050.$

b) Giả sử trong 3 sản phẩm chọn ra có đúng 2 sản phẩm tốt. Khi đó, biến cố A đã xảy ra. Do đó, xác suất để 2 sản phẩm tốt đó của xí nghiệp I chính là xác suất có điều kiện $P(A_1/A)$.

Áp dụng Công thức Bayes và sử dụng kết quả vừa tìm được ở câu a) ta có

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1)P(A/A_1)}{P(A)} = \frac{(10/20).0,375}{0,4050} = 0,4630.$$

Bài 1.10: Có 10 sinh viên đi thi, trong đó có 3 thuộc loại giỏi, 4 khá và 3 trung bình. Trong số 20 câu hỏi thi qui định thì sinh viên loại giỏi trả lời được tất cả, sinh viên khá trả lời được 16 câu còn sinh viên trung bình được 10 câu. Gọi ngẫu nhiên một sinh viên và phát một phiếu thi gồm 4 câu hỏi thì anh ta trả lời được cả 4 câu hỏi. Tính xác suất để sinh viên đó thuộc loại khá.

Lời giải

Tóm tắt:

Xếp loại sinh viên	Giỏi	Khá	Trung bình
Số lượng	3	4	3
Số câu trả lời được/20	20	16	10

Gọi A là biến cố sinh viên trả lời được cả 3 câu hỏi.

A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố sinh viên thuộc loại Giỏi, Khá; Trung bình.

Yêu cầu của bài toán là tính xác suất có điều kiện $P(A_2/A)$.

Các biến cố A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi, và ta có:

$P(A_1) = 3/10;\ P(A_2) = 4/10;\ P(A_3) = 3/10.$

Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{P(A)}.$$

Mặt khác, theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3).$

Theo công thức tính xác suất lựa chọn, ta có:

$$P(A/A_1) = \frac{C_{20}^4}{C_{20}^4} = 1;$$

$$P(A/A_2) = \frac{C_{16}^4 C_4^0}{C_{20}^4} = \frac{1820}{4845};$$

$$P(A/A_3) = \frac{C_{10}^4 C_{10}^0}{C_{20}^4} = \frac{210}{4845}.$$

Suy ra $P(A_2/A) = 0{,}3243$.

Bài 1.11: Có hai hộp I và II, trong đó hộp I chứa 10 bi trắng và 8 bi đen; hộp II chứa 8 bi trắng và 6 bi đen. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên 2 bi bỏ đi, sau đó bỏ tất cả các bi còn lại của hai hộp vào hộp III (rỗng). Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp III. Tính xác suất để trong 2 bi lấy từ hộp III có 1 trắng, 1 đen.

Lời giải

Gọi A là biến cố bi lấy được 1 trắng, 1 đen.

A_j (j = 0, 1, 2, 3, 4) là biến cố có j bi trắng và (4-j) bi đen có trong 4 bi bỏ đi (từ cả hai hộp I và II). Khi đó A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(A) = P(A_0)P(A/A_0) + P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3) + P(A_4)P(A/A_4).$$

trong đó

$P(A/A_0) = \dfrac{C_{18}^1 C_{10}^1}{C_{28}^2} = \dfrac{10}{21}$ (Vì khi A_0 đã xảy ra thì trong hộp III có 28 bi gồm 18 trắng , 10 đen).

Tương tự,

$$P(A/A_1) = \frac{C_{17}^1 C_{11}^1}{C_{28}^2} = \frac{187}{378}; P(A/A_2) = \frac{C_{16}^1 C_{12}^1}{C_{28}^2} = \frac{32}{63};$$

$$P(A/A_3) = \frac{C_{15}^1 C_{13}^1}{C_{28}^2} = \frac{65}{126}; P(A/A_4) = \frac{C_{14}^1 C_{14}^1}{C_{28}^2} = \frac{14}{27}.$$

Bây giờ ta tính $P(A_0)$; $P(A_1)$; $P(A_2)$; $P(A_3)$; $P(A_4)$.

Gọi B_i , C_i (i = 0, 1, 2) lần lượt là các biến cố có i bi trắng và (2 - i) bi đen có trong 2 bi được chọn ra từ hộp I, hộp II. Khi đó

- B_0, B_1, B_2 xung khắc và ta có:

$$P(B_0) = \frac{C_{10}^0 C_8^2}{C_{18}^2} = \frac{28}{153}; P(B_1) = \frac{C_{10}^1 C_8^1}{C_{18}^2} = \frac{80}{153}; P(B_2) = \frac{C_{10}^2 C_8^0}{C_{18}^2} = \frac{5}{17}.$$

- C_0, C_1, C_2 xung khắc và ta có:

$$P(C_0) = \frac{C_8^0 C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}; P(C_1) = \frac{C_8^1 C_6^1}{C_{14}^2} = \frac{48}{91}; P(C_2) = \frac{C_8^2 C_6^0}{C_{14}^2} = \frac{28}{91}.$$

- B_i và C_j độc lập.

- Tổng số bi trắng có trong 4 bi chọn ra phụ thuộc vào các biến cố B_i và C_j theo bảng sau:

	C_0	C_1	C_2
B_0	0	1	2
B_1	1	2	3
B_2	2	3	4

$A_0 = B_0C_0 \Rightarrow P(A_0) = P(B_0)P(C_0) = 20/663.$

$A_1 = B_0C_1 + B_1C_0 \Rightarrow P(A_1) = P(B_0)P(C_1) + P(B_1)P(C_0) = 848/4641.$

$A_2 = B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0 \Rightarrow P(A_2) = P(B_0)P(C_2)+P(B_1)P(C_1)+P(B_2)P(C_0) =757/1989.$

$A_3 = B_1C_2 + B_2C_1 \Rightarrow P(A_3) = P(B_1)P(C_2)+P(B_2)P(C_1) = 4400/13923.$

$A_4 = B_2C_2 \Rightarrow P(A_4) = P(B_2)P(C_2) = 20/221.$

Từ đó suy ra $P(A) = 0{,}5080$.

Bài 1.12: Có hai hộp cùng cỡ. Hộp thứ nhất chứa 4 bi trắng 6 bi xanh, hộp thứ hai chứa 5 bi trắng và 7 bi xanh. Chọn ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ra 2 bi thì được 2 bi trắng. Tính xác suất để viên bi tiếp theo cũng lấy từ hộp trên ra lại là bi trắng.

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố 2 bi lấy đầu tiên là bi trắng.

A_2 là biến cố bi lấy lần sau là bi trắng.

Bài tóan yêu cầu tính $P(A_2/A_1)$.

Theo công thức nhân xác suất, ta có $P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)$. Suy ra

$$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}.$$

Bây giờ ta tính các xác suất $P(A_1)$ và $P(A_1A_2)$.

Gọi B_1, B_2 lần lượt là các biến cố chọn được hộp I, hộp II. Khi đó B_1, B_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(A_1) = P(B_1)\,P(A_1/ B_1) + P(B_2)\,P(A_1/ B_2)$$

Mà

$$P(A_1/B_1)=\frac{C_4^2C_6^0}{C_{10}^2}=\frac{6}{45};$$

$$P(A_1/B_2)=\frac{C_5^2C_7^0}{C_{12}^2}=\frac{10}{66}.$$

nên $P(A_1)$ = 47/330.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(A_1A_2) = P(B_1)\,P(A_1A_2/B_1) + P(B_2)\,P(A_1A_2/B_2).$$

Mà

$$P(A_1A_2/B_1)=P(A_1/B_1)P(A_2/A_1B_1)=\frac{6}{45}\frac{2}{8}=\frac{1}{30};$$

$$P(A_1A_2/B_2)=P(A_1/B_2)P(A_2/A_1B_2)=\frac{10}{66}\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

nên $P(A_1A_2)$ = 13/330. Suy ra xác suất cần tìm là $P(A_2/A_1)$ =13/47= 0,2766.

Bài 1.13: Một lô hàng gồm a sản phẩm loại I và b sản phẩm loại II được đóng gói để gửi cho khách hàng. Nơi nhận kiểm tra lại thấy thất lạc 1 sản phẩm. Chọn ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm thì thấy đó là sản phẩm loại I. Tính xác suất để sản phẩm thất lạc cũng thuộc loại I.

Lời giải

Gọi A là biến cố sản phẩm được chọn ra thuộc loại I.
A_1, A_2 lần lượt là các biến cố sản phẩm thất lạc thuộc loại I, loại II.
Yêu cầu của bài toán là tính xác suất có điều kiện $P(A_1/A)$.
Ta thấy A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và

$$P(A_1)=\frac{C_a^1C_b^0}{C_{a+b}^1}=\frac{a}{a+b};\quad P(A_2)=\frac{C_a^0C_b^1}{C_{a+b}^1}=\frac{b}{a+b}.$$

Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{P(A)}=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{P(A_1)P(A/A_1)+P(A_2)P(A/A_2)}$$

Mà

$$P(A/A_1)=\frac{C_{a-1}^1C_b^0}{C_{a+b-1}^1}=\frac{a-1}{a+b-1};\quad P(A/A_2)=\frac{C_a^1C_{b-1}^0}{C_{a+b-1}^1}=\frac{a}{a+b-1}.$$

nên

$$P(A_1/A)=\frac{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}}{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}}=\frac{a-1}{a+b-1}$$

Bài 1.14: Có 3 hộp phấn, trong đó hộp I chứa 15 viên tốt và 5 viên xấu, hộp II chứa 10 viên tốt và 4 viên xấu, hộp III chứa 20 viên tốt và 10 viên xấu. Ta gieo một con xúc xắc cân đối. Nếu thấy xuất hiện mặt 1 chấm thì ta chọn hộp I; nếu xuất hiện mặt 2 hoặc 3 chấm thì chọn hộp II, còn xuất hiện các mặt còn lại thì chọn hộp III. Từ hộp được chọn lấy ngẫu nhiên ra 4 viên phấn. Tìm xác suất để lấy được ít nhất 2 viên tốt.

Lời giải

Gọi A là biến cố chọn được ít nhất 2 viên phấn tốt.

A_j (j =1,2, 3) là biến cố chọn được hộp thứ j. Khi đó A_1, A_2, A_3 là hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

- A_1 xảy ra khi và chỉ khi thảy con xúc xắc, xuất hiện mặt 1 chấm, do đó $P(A_1)$ = 1/6.
- Tương tự, $P(A_2)$ = 2/6; $P(A_3)$ = 3/6.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3).$$

Từ giả thiết ta có:

$$P(A/A_1)=\frac{C_{15}^2C_5^2}{C_{20}^4}+\frac{C_{15}^3C_5^1}{C_{20}^4}+\frac{C_{15}^4C_5^0}{C_{20}^4}=\frac{4690}{4845};$$

$$P(A/A_2)=\frac{C_{10}^2C_4^2}{C_{14}^4}+\frac{C_{10}^3C_4^1}{C_{14}^4}+\frac{C_{10}^4C_4^0}{C_{14}^4}=\frac{960}{1001};$$

$$P(A/A_3)=\frac{C_{20}^2C_{10}^2}{C_{30}^4}+\frac{C_{20}^3C_{10}^1}{C_{30}^4}+\frac{C_{20}^4C_{10}^0}{C_{30}^4}=\frac{24795}{27405}.$$

Suy ra P(A) =0,9334.

Bài 1.15: Có hai kiện hàng I và II. Kiện thứ nhất chứa 10 sản phẩm, trong đó có 8 sản phẩm loại A. Kiện thứ hai chứa 20 sản phẩm, trong đó có 4 sản phẩm loại A. Lấy từ mỗi kiện 2 sản phẩm. Sau đó, trong 4 sản phẩm thu được chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để trong 2 sản phẩm chọn ra sau cùng có đúng 1 sản phẩm loại A.

Lời giải

Gọi C là biến cố trong 2 sản phẩm chọn ra sau cùng có đúng 1 sản phẩm loại A.

A_j (j = 0, 1, 2, 3, 4) là biến cố có j sản phẩm loại A và (4-j) sản phẩm loại B có trong 4 sản phẩm lấy từ hai kiện I và II. Khi đó A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(C) = P(A_0)P(C/A_0) + P(A_1)P(C/A_1) + P(A_2)P(C/A_2) + P(A_3)P(C/A_3) + P(A_4)P(C/A_4).$$

Ta có:

$$P(C/A_0) = 0;$$

$$P(C/A_1) = \frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2} = \frac{3}{6}$$

$$P(C/A_2) = \frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2} = \frac{4}{6}$$

$$P(C/A_3) = \frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2} = \frac{3}{6}$$

$$P(C/A_4) = 0.$$

Bây giờ ta tính $P(A_1)$; $P(A_2)$; $P(A_3)$.

Gọi B_i, C_i (i = 0, 1, 2) lần lượt là các biến cố có i sp A và (2 - i) sp B có trong 2 sp được chọn ra từ kiện I, kiện II. Khi đó

- B_0, B_1, B_2 xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(B_0) = \frac{C_8^0C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P(B_1) = \frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$P(B_2) = \frac{C_8^2C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

- C_0, C_1, C_2 xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(C_0) = \frac{C_4^0C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{120}{190};$$

$$P(C_1) = \frac{C_4^1C_{16}^1}{C_{20}^2} = \frac{64}{190};$$

$$P(C_2) = \frac{C_4^2C_{16}^0}{C_{20}^2} = \frac{6}{190};$$

- B_i và C_j độc lập.

- Tổng số sp A có trong 4 sp chọn ra phụ thuộc vào các biến cố B_i và C_j theo bảng sau:

	C_0	C_1	C_2
B_0	0	1	2
B_1	1	2	3
B_2	2	3	4

Ta có:

$A_1 = B_0C_1 + B_1C_0$.

$A_2 = B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0$.

$A_3 = B_1C_2 + B_2C_1$.

Từ đây, nhờ các công thức cộng và nhân xác suất ta tính được:

$P(A_1) = 0{,}2320$; $P(A_2) = 0{,}5135$; $P(A_3) = 0{,}2208$.

Suy ra xác suất cần tìm là $P(C) = 0{,}5687$.

Bài 1.16: Một xạ thủ bắn 10 viên đạn vào một mục tiêu. Xác suất để 1 viên đạn bắn ra trúng mục tiêu là 0,8 . Biết rằng: Nếu có 10 viên trúng thì mục tiêu chắc chắn bị diệt. Nếu có từ 2 đến 9 viên trúng thì mục tiêu bị diệt với xác suất 80%. Nếu có 1 viên trúng thì mục tiêu bị diệt với xác suất 20%.

a) Tính xác suất để mục tiêu bị diệt.

b) Giả sử mục tiêu đã bị diệt. Tính xác suất có 10 viên trúng.

Lời giải

Tóm tắt:

- Số viên bắn ra: 10 viên.
- Xác suất trúng của mỗi viên: 0,8.

Số viên trúng	1	2-9	10
Xác suất mục tiêu bị diệt	20%	80%	100%

a) Gọi A là biến cố mục tiêu bị diệt.

A_0, A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố có 0; 1; 2-9; 10 viên trúng. Khi đó, A_0, A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và giả thiết cho ta:

$$P(A/A_0) = 0;\ P(A/A_1) = 20\% = 0,2;$$
$$P(A/A_2) = 80\% = 0,8;\ P(A/A_3) = 100\% = 1.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = P(A_0)P(A/A_0) + P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3).$$

Theo công thức Bernoulli với n =10; p = 0,8, q = 0,2, ta có

$P(A_0) = q^{10} = (0,2)^{10};$

$P(A_1) = C_{10}^{1}pq^9 = 10(0,8)(0,2)^9;$

$P(A_3) = p^{10} = (0,8)^{10};$

$P(A_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) - P(A_3) = 1 - (0,2)^{10} - 10(0,8)(0,2)^9 - (0,8)^{10}.$

Suy ra $P(A) = 0,8215$.

b) Giả sử mục tiêu đã bị diệt. Khi đó biến cố A đã xảy ra. Do đó xác suất có 10 viên trúng trong trường hợp này chính là xác suất có điều kiện $P(A_3/A)$.

Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A_3 / A) = \frac{P(A_3)P(A / A_3)}{P(A)}$$

Từ đây ta tính được $P(A_3/A) = 0,1307$.

Bài 1.17: Một máy sản xuất sản phẩm với tỉ lệ sản phẩm loại A là 60%. Một lô hàng gồm 10 sản phẩm với tỉ lệ sản phẩm loại A là 60%. Cho máy sản xuất 2 sản phẩm và từ lô hàng lấy ra 3 sản phẩm.

a) Tính xác suất để số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm do máy sản xuất bằng số sản phẩm loại A có trong 3 sản phẩm được lấy ra từ lô hàng.

b) Giả sử trong 5 sản phẩm thu được có 2 sản phẩm loại A. Tính xác suất để 2 sản phẩm loại A đó đều do máy sản xuất.

Lời giải

Gọi A_j (j = 0, 1, 2) là các biến cố có j sản phẩm loại A và (2-j) sản phẩm không thuộc loại A có trong 2 sản phẩm do máy sản xuất.
Gọi B_j (j = 0, 1, 2, 3) là các biến cố có j sản phẩm loại A và (3-j) sản phẩm không thuộc loại A có trong 3 sản phẩm lấy từ lô hàng.
Khi đó

- A_0, A_1, A_2 xung khắc từng đôi và theo công thức Bernoulli với n = 2; p = 0,6; q = 0,4 ta có:

$$P(A_0) = C_2^0 p^0 q^2 = (0,4)^2 = 0,16;$$
$$P(A_1) = C_2^1 p^1 q^1 = 2(0,6)(0,4) = 0,48;$$
$$P(A_2) = C_2^2 p^2 q^0 = (0,6)^2 = 0,36.$$

- B_0, B_1, B_2, B_3 xung khắc từng đôi và theo công thức tính xác suất lựa chọn với N = 10, N_A = 6, n= 3 ta có (vì lô hàng gồm 10 sản phẩm với tỉ lệ sản phẩm loại A là 60%, nghĩa là lô hàng gồm 6 sản phẩm loại A và 4 sản phẩm không thuộc loại A):

$$P(B_0) = \frac{C_6^0 C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120};$$
$$P(B_1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120};$$
$$P(B_2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120};$$
$$P(B_3) = \frac{C_6^3 C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}.$$

- A_i và B_j độc lập.

a) Gọi C là biến cố số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm do máy sản xuất bằng số sản phẩm loại A có trong 2 sản phẩm được lấy ra từ lô hàng. Ta có:

$$C = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2.$$

Từ đây, do tính xung khắc và độc lập, các công thức cộng và nhân xác suất cho ta:

$$P(C) = P(A_0)P(B_0) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) = 0,3293.$$

b) Gọi D là biến cố có 2 sản phẩm loại A trong 5 sản phẩm có được.
Giả sử trong 5 sản phẩm trên có 2 sản phẩm loại A. Khi đó biến cố D đã xảy ra. Do đó, xác suất để 2 sản phẩm loại A đó đều do máy sản xuất chính là xác suất có điều kiện $P(A_2/D)$.

Theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(A_2/D) = \frac{P(A_2D)}{P(D)}.$$

Nhận xét rằng tổng số sản phẩm loại A có trong 5 sản phẩm thu được phụ thuộc vào các biến cố A_i và B_j theo bảng sau:

	B_0	B_1	B_2	B_3
A_0	0	1	2	3
A_1	1	2	3	4
A_2	2	3	4	5

Suy ra

$$D = A_0B_2 + A_1B_1 + A_2B_0 \quad \text{và} \quad A_2D = A_2B_0.$$

Từ đây, ta tính được $P(D) = 0,236$; $P(A_2D) = 0,012$. Suy ra xác suất cần tìm là

$$P(A_2/D) = 0,0508.$$

Bài 1.18: Có hai lô hàng, mỗi lô chứa 60% sản phẩm tốt, trong đó lô I chứa 15 sản phẩm, lô II chứa rất nhiều sản phẩm. Từ lô II lấy ra 3 sản phẩm bỏ vào lô I, sau đó từ lô I lấy ra 2 sản phẩm.

a) Tính xác suất lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I.
b) Tính xác suất lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I, trong đó sp tốt có trong lô I từ trước.
c) Giả sử đã lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I. Tính xác suất đã lấy được 2sp tốt, 1sp xấu từ lô II.

Lời giải

Gọi A_j (j = 0,1, 2, 3) là biến cố có j sản phẩm tốt và (3-j) sản phẩm xấu có trong 3 sản phẩm được chọn ra từ lô II. Khi đó A_0, A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi. Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(A_0) = C_3^0p^0q^3 = (0,4)^3 = 0,064;$$
$$P(A_1) = C_3^1p^1q^2 = 3(0,6)^1(0,4)^2 = 0,288;$$
$$P(A_2) = C_3^2p^2q^1 = 3(0,6)^2(0,4)^1 = 0,432;$$
$$P(A_3) = C_3^3p^3q^0 = (0,6)^3 = 0,216.$$

a) Gọi A là biến cố lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I.
Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = P(A_0)P(A/A_0) + P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3).$$

Từ giả thiết ta suy ra trong lô I có 15.60% = 9 sp tốt và 6 sp xấu. Do đó theo công thức tính xác suất lựa chọn, ta có:

$$P(A/A_0) = \frac{C_9^1C_9^1}{C_{18}^2} = \frac{81}{153};$$
$$P(A/A_1) = \frac{C_{10}^1C_8^1}{C_{18}^2} = \frac{80}{153};$$
$$P(A/A_2) = \frac{C_{11}^1C_7^1}{C_{18}^2} = \frac{77}{153};$$
$$P(A/A_3) = \frac{C_{12}^1C_6^1}{C_{18}^2} = \frac{72}{153}.$$

Suy ra xác suất cần tìm là: $P(A) = 0,5035$

b) Gọi B là biến cố lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I, trong đó sp tốt có trong lô I từ trước. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(B) = P(A_0)P(B/A_0) + P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3).$$

Ta có:

$$P(B/A_0) = \frac{C_9^1C_9^1}{C_{18}^2} = \frac{81}{153};$$
$$P(B/A_1) = \frac{C_9^1C_8^1}{C_{18}^2} = \frac{72}{153};$$
$$P(B/A_2) = \frac{C_9^1C_7^1}{C_{18}^2} = \frac{63}{153};$$
$$P(B/A_3) = \frac{C_9^1C_6^1}{C_{18}^2} = \frac{54}{153}.$$

Suy ra xác suất cần tìm là: $P(B) = 0,4235$.

c) Giả sử đã lấy được 1sp tốt, 1sp xấu từ lô I. Khi đó biến cố A đã xảy ra. Do đó xác suất đã lấy được 2sp tốt, 1sp xấu từ lô II trong trường hợp này chính là XS có điều kiện $P(A_2/A)$. Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A_2 / A) = \frac{P(A_2)P(A / A_2)}{P(A)} = \frac{0,432.\frac{77}{153}}{0,5035} = 0,4318.$$

-------------- ◦ -------------