

BÀI GIẢI
XÁC SUẤT THỐNG KÊ
(GV: Trần Ngọc Hội – 2009)

CHƯƠNG 2

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN
VÀ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Bài 2.1: Nước giải khát được chở từ Sài Gòn đi Vũng Tàu. Mỗi xe chở 1000 chai bia Sài Gòn, 2000 chai coca và 800 chai nước trái cây. Xác suất để 1 chai mỗi loại bị bể trên đường đi tương ứng là 0,2%; 0,11% và 0,3%.

Nếu không quá 1 chai bị bể thì lái xe được thưởng.

- a) Tính xác suất có ít nhất 1 chai bia Sài Gòn bị bể.
- b) Tính xác suất để lái xe được thưởng.
- c) Lái xe phải chờ ít mất mấy chuyến để xác suất có ít nhất một chuyến được thưởng không nhỏ hơn 0,9?

Lời giải

Tóm tắt:

Loại	Bia Sài Gòn	Coca	Nước trái cây
Số lượng/chuyến	1000	2000	800
Xác suất 1 chai bể	0,2%	0,11%	0,3%

- Gọi X_1 là ĐLNN chỉ số chai bia SG bị bể trong một chuyến. Khi đó, X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 1000$ và $p_1 = 0,2\% = 0,002$. Vì n_1 khá lớn và p_1 khá bé nên ta có thể xem X_1 có phân phối Poisson:

$$X_1 \sim P(a_1) \text{ với } a_1 = n_1 p_1 = 1000 \cdot 0,002 = 2, \text{ nghĩa là } X_1 \sim P(2).$$

- Tương tự, gọi X_2, X_3 lần lượt là các ĐLNN chỉ số chai coca, chai nước trái cây bị bể trong một chuyến. Khi đó, X_2, X_3 có phân phối Poisson:

$$X_2 \sim P(2000 \cdot 0,0011) = P(2,2);$$

$$X_3 \sim P(800 \cdot 0,003) = P(2,4).$$

- a) Xác suất có ít nhất 1 chai bia Sài Gòn bị bể là

$$P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 1 - e^{-2} = 0,8647.$$

- b) Tính xác suất để lái xe được thưởng.

Theo giả thiết, lái xe được thưởng khi có không quá 1 chai bị bể, nghĩa là

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 1.$$

Vì $X_1 \sim P(2); X_2 \sim P(2,2); X_3 \sim P(2,4)$ nên $X_1 + X_2 + X_3 \sim P(2+2,2+2,4) = P(6,6)$

Suy ra xác suất lái xe được thưởng là:

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1) = P(X_1 + X_2 + X_3 = 0) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 1) = \frac{e^{-6,6} (6,6)^0}{0!} + \frac{e^{-6,6} (6,6)^1}{1!} = 0,0103.$$

- c) Lái xe phải chờ ít mất mấy chuyến để xác suất có ít nhất một chuyến được thưởng không nhỏ hơn 0,9?

Gọi n là số chuyến xe cần thực hiện và A là biến cố có ít nhất 1 chuyến được thưởng. Yêu cầu bài toán là xác định n nhỏ nhất sao cho $P(A) \geq 0,9$.

Biến cố đối lập của A là: \bar{A} không có chuyến nào được thưởng.

Theo câu b), xác suất để lái xe được thưởng trong một chuyến là $p = 0,0103$. Do đó theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q^n = 1 - (1 - 0,0103)^n = 1 - (0,9897)^n.$$

Suy ra

$$P(A) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - (0,9897)^n \geq 0,9$$

$$\Leftrightarrow (0,9897)^n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9897) \leq \ln 0,1$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln(0,9897)} \approx 222,3987$$

$$\Leftrightarrow n \geq 223.$$

Vậy lái xe phải chờ ít nhất là 223 chuyến.

Bài 2.2: Một máy tính gồm 1000 linh kiện A, 800 linh kiện B và 2000 linh kiện C. Xác suất hỏng của ba linh kiện đó lần lượt là 0,02%; 0,0125% và 0,005%. Máy tính ngưng hoạt động khi số linh kiện hỏng nhiều hơn 1. Các linh kiện hỏng độc lập với nhau.

- Tính xác suất để có ít nhất 1 linh kiện B bị hỏng.
- Tính xác suất để máy tính ngưng hoạt động.
- Giả sử trong máy đã có 1 linh kiện hỏng. Tính xác suất để máy tính ngưng hoạt động.

Lời giải

Tóm tắt:

Loại linh kiện	A	B	C
Số lượng/máy	1000	800	2000
Xác suất 1linh kiện hỏng	0,02%	0,0125%	0,005%

- Gọi X_1 là ĐLNN chỉ số linh kiện A bị hỏng trong một máy tính. Khi đó, X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 1000$ và $p_1 = 0,02\% = 0,0002$. Vì n_1 khá lớn và p_1 khá bé nên ta có thể xem X_1 có phân phân phối Poisson:

$$X_1 \sim P(a_1) \text{ với } a_1 = n_1 p_1 = 1000 \cdot 0,0002 = 0,2, \text{ nghĩa là}$$

$$X_1 \sim P(0,2).$$

- Tương tự, gọi X_2, X_3 lần lượt là các ĐLNN chỉ số linh kiện B, C bị hỏng trong một máy tính. Khi đó, X_2, X_3 có phân phối Poisson như sau:

$$X_2 \sim P(800 \cdot 0,0125\%) = P(0,1);$$

$$X_3 \sim P(2000 \cdot 0,005\%) = P(0,1).$$

- Xác suất có ít nhất 1 linh kiện B bị hỏng là:

$$P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - \frac{e^{-0,1}(0,1)^0}{0!} = 1 - e^{-0,1} = 0,0952.$$

- Tính xác suất để máy tính ngưng hoạt động.

Theo giả thiết, máy tính ngưng hoạt động khi số linh kiện hỏng nhiều hơn 1, nghĩa là khi

$$X_1 + X_2 + X_3 > 1.$$

Vì $X_1 \sim P(0,2); X_2 \sim P(0,1); X_3 \sim P(0,1)$ nên $X_1 + X_2 + X_3 \sim P(0,2+0,1+0,1) = P(0,4)$

Suy ra xác suất để máy tính ngưng hoạt động là:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 > 1) &= 1 - P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1) \\ &= 1 - [P(X_1 + X_2 + X_3 = 0) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 1)] = \\ &= 1 - \frac{e^{-0,4}(0,4)^0}{0!} - \frac{e^{-0,4}(0,4)^1}{1!} \\ &= 1 - 1,4 \cdot e^{-0,4} = 0,0615 = 6,15\%. \end{aligned}$$

- Giả sử trong máy đã có 1 linh kiện hỏng. Khi đó máy tính ngưng hoạt động khi có thêm ít nhất 1 linh kiện hỏng nữa, nghĩa là khi

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 1.$$

Suy ra xác suất để máy tính ngưng hoạt động trong trường hợp này là:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 1) &= 1 - P(X_1 + X_2 + X_3 < 1) = 1 - P(X_1 + X_2 + X_3 = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-0,4}(0,4)^0}{0!} = 1 - e^{-0,4} = 0,3297 = 32,97\%. \end{aligned}$$

Bài 2.3: Trọng lượng của một loại sản phẩm được quan sát là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 50kg và phương sai 100kg^2 . Những sản phẩm có trọng lượng từ 45kg đến 70kg được xếp vào loại A. Chọn ngẫu nhiên 100 sản phẩm (trong rất nhiều sản phẩm). Tính xác suất để

- có đúng 70 sản phẩm loại A.
- có không quá 60 sản phẩm loại A.
- có ít nhất 65 sản phẩm loại A.

Lời giải

Trước hết ta tìm xác suất để một sản phẩm thuộc loại A.

Gọi X_0 là trọng lượng của loại sản phẩm đã cho. Từ giả thiết ta suy ra X_0 có phân phối chuẩn $X_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ với $\mu_0 = 50, \sigma_0^2 = 100$ ($\sigma_0 = 10$). Vì một sản phẩm được xếp vào loại A khi có trọng lượng từ 45kg đến 70kg nên xác suất để một sản phẩm thuộc loại A là $P(45 \leq X_0 \leq 70)$.

Ta có

$$P(45 \leq X_0 \leq 70) = \Phi\left(\frac{70 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{45 - \mu_0}{\sigma_0}\right) = \Phi\left(\frac{70 - 50}{10}\right) - \Phi\left(\frac{45 - 50}{10}\right) \\ = \Phi(2) - \Phi(-0,5) = \Phi(2) + \Phi(0,5) = 0,4772 + 0,1915 = 0,6687.$$

(Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $\Phi(2) = 0,4772$; $\Phi(0,5) = 0,1915$).

Vậy xác suất để một sản phẩm thuộc loại A là $p = 0,6687$.

Bây giờ, kiểm tra 100 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 100 sản phẩm được kiểm tra, thì X có phân phối nhị thức $X \sim B(n, p)$ với $n = 100, p = 0,6687$. Vì $n = 100$ khá lớn và $p = 0,6687$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X có phân phối chuẩn như sau:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{với } \mu = np = 100 \cdot 0,6687 = 66,87; \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,6687 \cdot (1 - 0,6687)} = 4,7068.$$

a) Xác suất để có 70 sản phẩm loại A là:

$$P(X = 70) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{70 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4,7068} f\left(\frac{70 - 66,87}{4,7068}\right) \\ = \frac{1}{4,7068} f(0,66) = \frac{0,3209}{4,7068} = 0,0681 = 6,81\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Gauss ta được $f(0,66) = 0,3209$).

b) Xác suất để có không quá 60 sản phẩm loại A là:

$$P(0 \leq X \leq 60) = \Phi\left(\frac{60 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{60 - 66,87}{4,7068}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 66,87}{4,7068}\right) \\ = \Phi(-1,46) - \Phi(-14,21) = -\Phi(1,46) + \Phi(14,21) = -\Phi(1,46) + \Phi(5) \\ = -0,4279 + 0,5 = 0,0721 = 7,21\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $\Phi(14,21) = \Phi(5) = 0,5$; $\Phi(1,46) = 0,4279$).

c) Xác suất để có ít nhất 65 sản phẩm loại A là:

$$P(65 \leq X \leq 100) = \Phi\left(\frac{100 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{65 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{100 - 66,87}{4,7068}\right) - \Phi\left(\frac{65 - 66,87}{4,7068}\right) \\ = \Phi(7,0388) - \Phi(-0,40) = \Phi(5) + \Phi(0,4) = 0,5 + 0,1554 = 0,6554 = 65,54\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $\Phi(7,0388) \approx \Phi(5) = 0,5$; $\Phi(0,4) = 0,1554$).

Bài 2.4: Sản phẩm trong một nhà máy được đóng thành từng kiện, mỗi kiện gồm 14 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm loại A và 6 sản phẩm loại B. Khách hàng chọn cách kiểm tra như sau: từ mỗi kiện lấy ra 4 sản phẩm; nếu thấy số sản phẩm thuộc loại A nhiều hơn số sản phẩm thuộc loại B thì mới nhận kiện đó; ngược lại thì loại kiện đó. Kiểm tra 100 kiện (trong rất nhiều kiện). Tính xác suất để

- có 42 kiện được nhận.
- có từ 40 đến 45 kiện được nhận.
- có ít nhất 42 kiện được nhận.

Lời giải

Trước hết ta tìm xác suất để một kiện được nhận.

Theo giả thiết, mỗi kiện chứa 14 sản phẩm gồm 8A và 6B. Từ mỗi kiện lấy ra 4 sản phẩm; nếu thấy số sản phẩm A nhiều hơn số sản phẩm B, nghĩa là được 3A,1B hoặc 4A, thì mới nhận kiện đó. Do đó xác suất để một kiện được nhận là:

$$P_4(3 \leq k \leq 4) = P_4(3) + P_4(4) = \frac{C_8^3 C_6^1}{C_{14}^4} + \frac{C_8^4 C_6^0}{C_{14}^4} = 0,4056$$

Vậy xác suất để một kiện được nhận là $p = 0,4056$.

Bây giờ, kiểm tra 100 kiện. Gọi X là số kiện được nhận trong 100 kiện được kiểm tra, thì X có phân phối nhị thức $X \sim B(n, p)$ với $n = 100, p = 0,4056$. Vì $n = 100$ khá lớn và $p = 0,4056$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X có phân phối chuẩn như sau:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{với } \mu = np = 100 \cdot 0,4056 = 40,56; \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,4056 \cdot (1 - 0,4056)} = 4,9101.$$

a) Xác suất để có 42 kiện được nhận là:

$$P(X = 42) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{42 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4,9101} f\left(\frac{42 - 40,56}{4,9101}\right) = \frac{1}{4,9101} f(0,29)$$

$$= \frac{0,3825}{4,9101} = 0,0779 = 7,79\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Gauss ta được $f(0,29) = 0,3825$).

b) Xác suất để có từ 40 đến 45 kiện được nhận là

$$P(40 \leq X \leq 45) = \Phi\left(\frac{45 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{40 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{45 - 40,56}{4,9101}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 40,56}{4,9101}\right)$$

$$= \Phi(0,90) - \Phi(-0,11) = \Phi(0,90) + \Phi(0,11) = 0,3159 + 0,0438 = 0,3597 = 35,97\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $\Phi(0,9) = 0,3519$; $\Phi(0,11) = 0,0438$).

c) Xác suất để có ít nhất 42 kiện được nhận là

$$P(42 \leq X \leq 100) = \Phi\left(\frac{100 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{42 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{100 - 40,56}{4,9101}\right) - \Phi\left(\frac{42 - 40,56}{4,9101}\right)$$

$$= \Phi(12) - \Phi(0,29) = 0,50 - 0,1141 = 0,3859 = 38,59\%.$$

(Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được $\Phi(12) = \Phi(5) = 0,5$; $\Phi(0,29) = 0,1141$).

Bài 2.5: Sản phẩm trong một nhà máy được đóng thành từng kiện, mỗi kiện gồm 10 sản phẩm. Số sản phẩm loại A trong các hộp là X có phân phối như sau:

X	6	8
P	0,9	0,1

Khách hàng chọn cách kiểm tra như sau: từ mỗi kiện lấy ra 2 sản phẩm; nếu thấy cả 2 sản phẩm đều loại A thì mới nhận kiện đó; ngược lại thì loại kiện đó. Kiểm tra 144 kiện (trong rất nhiều kiện).

- Tính xác suất để có 53 kiện được nhận.
- Tính xác suất để có từ 52 đến 56 kiện được nhận.
- Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu kiện để xác suất có ít nhất 1 kiện được nhận không nhỏ hơn 95%?

Lời giải

Trước hết ta tìm xác suất p để một kiện được nhận.

Gọi C là biến cố kiện hàng được nhận. Ta cần tìm $p = P(C)$.

Từ giả thiết ta suy ra có hai loại kiện hàng:

Loại I: gồm 6A, 4B chiếm 0,9 = 90%.

Loại II: gồm 8A, 2B chiếm 0,1 = 10%.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố kiện hàng thuộc loại I, II. Khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có

$$P(A_1) = 0,9; P(A_2) = 0,1.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(C) = P(A_1)P(C/A_1) + P(A_2)P(C/A_2).$$

Theo giả thiết, từ mỗi kiện lấy ra 2 sản phẩm; nếu cả 2 sản phẩm thuộc loại A thì mới nhận kiện đó. Do đó:

$$P(C/A_1) = P_2(2) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{3};$$

$$P(C/A_2) = P_2(2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Suy ra $P(C) = 0,9 \cdot (1/3) + 0,1 \cdot (28/45) = 0,3622$.

Vậy xác suất để một kiện được nhận là $p = 0,3622$.

Bây giờ, kiểm tra 144 kiện. Gọi X là số kiện được nhận trong 144 kiện được kiểm tra, thì X có phân phối nhị thức $X \sim B(n, p)$ với $n = 144$, $p = 0,3622$. Vì $n = 144$ khá lớn và $p = 0,3622$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X có phân phối chuẩn như sau:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

với $\mu = np = 144 \cdot 0,3622 = 52,1568$;

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{144 \cdot 0,3622 \cdot (1 - 0,3622)} = 5,7676.$$

- Xác suất để có 53 kiện được nhận là $P(X=53) = 6,84\%$ (Tương tự Bài 21).
- Xác suất để có từ 52 đến 56 kiện được nhận là $P(52 \leq X \leq 56) = 26,05\%$ (Tương tự Bài 21).
- Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu kiện để xác suất có ít nhất 1 kiện được nhận không nhỏ hơn 95%?

Gọi n là số kiện cần kiểm tra và D là biến cố có ít nhất 1 kiện được nhận. Yêu cầu bài toán là xác định n nhỏ nhất sao cho $P(D) \geq 0,95$.

Biến cố đối lập của D là \bar{D} : không có kiện nào được nhận.
 Theo chứng minh trên, xác suất để một kiện được nhận là $p = 0,3622$.
 Do đó
 Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - q^n = 1 - (1 - 0,3622)^n = 1 - (0,6378)^n.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P(D) \geq 0,95 &\Leftrightarrow 1 - (0,6378)^n \geq 0,95 \\ &\Leftrightarrow (0,6378)^n \leq 0,05 \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,6378) \leq \ln 0,05 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln(0,6378)} \approx 6,6612 \\ &\Leftrightarrow n \geq 7. \end{aligned}$$

Vậy phải kiểm tra ít nhất 7 kiện.

Bài 2.6: Một máy sản xuất sản phẩm với tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80% và một máy khác cũng sản xuất loại sản phẩm này với tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 60%. Chọn ngẫu nhiên một máy và cho sản xuất 100 sản phẩm. Tính xác suất để

- có 70 sản phẩm đạt tiêu chuẩn.
- có từ 70 đến 90 sản phẩm đạt tiêu chuẩn.
- có không ít hơn 70 sản phẩm đạt tiêu chuẩn.

Lời giải

Gọi X là ĐLNN chỉ số sản phẩm đạt tiêu chuẩn trong 100 sản phẩm.

A_1, A_2 lần lượt là các biến cố chọn được máy 1, máy 2.

Khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, với mỗi $0 \leq k \leq 100$, ta có:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(A_1)P(X=k/A_1) + P(A_2)P(X=k/A_2) \\ &= \frac{1}{2}P(X=k/A_1) + \frac{1}{2}P(X=k/A_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Như vậy, gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số sản phẩm đạt tiêu chuẩn trong trường hợp chọn được máy 1, máy 2. Khi đó:

- (1) cho ta $P(X = k) = \frac{1}{2}P(X_1=k) + \frac{1}{2}P(X_2=k)$

- X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 100, p_1 = 80\% = 0,8$. Vì $n_1 = 100$ khá lớn và $p_1 = 0,8$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_1 có phân phối chuẩn như sau:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

với $\mu_1 = n_1 p_1 = 100 \cdot 0,8 = 80$;

$$\sigma_1 = \sqrt{n_1 p_1 q_1} = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 4.$$

- X_2 có phân phối nhị thức $X_2 \sim B(n_2, p_2)$ với $n_2 = 100, p_2 = 60\% = 0,60$. Vì $n_2 = 100$ khá lớn và $p_2 = 0,60$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_2 có phân phối chuẩn như sau:

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

với $\mu_2 = n_2 p_2 = 100 \cdot 0,60 = 60$;

$$\sigma_2 = \sqrt{n_2 p_2 q_2} = \sqrt{100 \cdot 0,60 \cdot 0,40} = 4,8990.$$

a) Xác suất để có 70 sản phẩm đạt tiêu chuẩn là:

$$\begin{aligned} P(X = 80) &= \frac{1}{2}P(X_1=70) + \frac{1}{2}P(X_2=70) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1} f\left(\frac{70 - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_2} f\left(\frac{70 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} f\left(\frac{70 - 80}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4,8990} f\left(\frac{70 - 60}{4,8990}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} f(-2,5) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4,8990} f(2,04) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,0175 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4,8990} \cdot 0,0498 = 0,000727 \end{aligned}$$

b) Xác suất để có từ 70 đến 90 sản phẩm đạt tiêu chuẩn là:

$$\begin{aligned} P(70 \leq X \leq 90) &= \frac{1}{2}P(70 \leq X_1 \leq 90) + \frac{1}{2}P(70 \leq X_2 \leq 90) \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{90 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{70 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{90 - \mu_2}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(\frac{70 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{90 - 80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{70 - 80}{4}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{90 - 60}{4,899}\right) - \Phi\left(\frac{70 - 60}{4,899}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi(2,5) - \Phi(-2,5) + \Phi(6,12) - \Phi(2,04) \right] \\ &= \frac{1}{2} (0,49379 + 0,49379 + 0,5 - 0,47932) \\ &= 0,50413 \end{aligned}$$

c) Xác suất có không ít hơn 70 sản phẩm đạt tiêu chuẩn là
 $P(70 \leq X \leq 100) = 0,5072$

(Tương tự câu b)

Bài 2.7: Một máy sản xuất sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm là 1% và một máy khác cũng sản xuất loại sản phẩm này với tỉ lệ phế phẩm là 2%.

Chọn ngẫu nhiên một máy và cho sản xuất 1000 sản phẩm. Tính xác suất để

- a) có 14 phế phẩm.
b) có từ 14 đến 20 phế phẩm.

Lời giải

Gọi X là ĐLNN chỉ số phế phẩm trong 1000 sản phẩm.

A_1, A_2 lần lượt là các biến cố chọn được máy 1, máy 2.

Khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, với mỗi $0 \leq k \leq 100$, ta có:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(A_1)P(X=k/A_1) + P(A_2)P(X= k/A_2) \\ &= \frac{1}{2}P(X=k/A_1) + \frac{1}{2}P(X=k/A_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Như vậy, gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số phế phẩm trong trường hợp chọn được máy 1, máy 2. Khi đó:

- (1) cho ta $P(X = k) = \frac{1}{2}P(X_1=k) + \frac{1}{2}P(X_2=k)$
- X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 1000$ và $p_1 = 1\% = 0,001$. Vì n_1 khá lớn và p_1 khá bé nên ta có thể xem X_1 có phân phối Poisson:
 $X_1 \sim P(a_1)$ với $a_1 = n_1 p_1 = 1000 \cdot 0,01 = 10$, nghĩa là $X_2 \sim P(10)$.
- X_2 có phân phối nhị thức $X_2 \sim B(n_2, p_2)$ với $n_2 = 1000$ và $p_2 = 2\% = 0,002$. Vì n_2 khá lớn và p_2 khá bé nên ta có thể xem X_2 có phân phối Poisson:
 $X_1 \sim P(a_2)$ với $a_2 = n_2 p_2 = 1000 \cdot 0,02 = 20$, nghĩa là $X_2 \sim P(20)$.

a) Xác suất để có 14 phế phẩm là:

$$P(X = 14) = \frac{1}{2}P(X_1=14) + \frac{1}{2}P(X_2=14) = \frac{1}{2} \frac{e^{-10} 10^{14}}{14!} + \frac{1}{2} \frac{e^{-20} 20^{14}}{14!} = 0,0454$$

b) Xác suất để có từ 14 đến 20 phế phẩm là:

$$\begin{aligned} P(14 \leq X \leq 20) &= \frac{1}{2}P(14 \leq X_1 \leq 20) + \frac{1}{2}P(14 \leq X_2 \leq 20) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=14}^{20} \frac{e^{-10} 10^k}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=14}^{20} \frac{e^{-20} 20^k}{k!} = 31,35\% \end{aligned}$$

Bài 2.8: Một xí nghiệp có hai máy I và II. Trong ngày hội thi, mỗi công nhân dự thi được phân một máy và với máy đó sẽ sản xuất 100 sản phẩm. Nếu số sản phẩm loại A không ít hơn 70 thì công nhân đó sẽ được thưởng. Giả sử đối với công nhân X, xác suất sản xuất được 1 sản phẩm loại A với các máy I và II lần lượt là 0,6 và 0,7.

- a) Tính xác suất để công nhân X được thưởng.
b) Giả sử công nhân X dự thi 50 lần. Số lần được thưởng tin chắc nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Y là ĐLNN chỉ số sản phẩm loại A có trong 100 sản phẩm được sản xuất.

A_1, A_2 lần lượt là các biến cố chọn được máy I, máy II.

Khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, với mỗi $0 \leq k \leq 100$, ta có:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(A_1)P(Y=k/A_1) + P(A_2)P(Y= k/A_2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y=k/A_1) + \frac{1}{2}P(Y=k/A_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Như vậy, gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số sản phẩm loại A có trong 100 sản phẩm được sản xuất trong trường hợp chọn được máy I, máy II. Khi đó:

- (1) cho ta $P(Y = k) = \frac{1}{2}P(X_1=k) + \frac{1}{2}P(X_2=k)$
- X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 100$, $p_1 = 0,6$. Vì $n_1 = 100$ khá lớn và $p_1 = 0,6$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_1 có phân phối chuẩn như sau:
 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
với $\mu_1 = n_1 p_1 = 100 \cdot 0,6 = 60$;
 $\sigma_1 = \sqrt{n_1 p_1 q_1} = \sqrt{100 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 4,8990$.
- X_2 có phân phối nhị thức $X_2 \sim B(n_2, p_2)$ với $n_2 = 100$, $p_2 = 0,7$. Vì $n_2 = 100$ khá lớn và $p_2 = 0,7$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_2 có phân phối chuẩn như sau:
 $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
với $\mu_2 = n_2 p_2 = 100 \cdot 0,7 = 70$;
 $\sigma_2 = \sqrt{n_2 p_2 q_2} = \sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = 4,5826$.

a) Xác suất để công nhân X được thưởng là:

$$\begin{aligned}
P(70 \leq Y \leq 100) &= \frac{1}{2}P(70 \leq X_1 \leq 100) + \frac{1}{2}P(70 \leq X_2 \leq 100) \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - \mu_1}{\sigma_1}) - \Phi(\frac{70 - \mu_1}{\sigma_1})] + \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - \mu_2}{\sigma_2}) - \Phi(\frac{70 - \mu_2}{\sigma_2})] \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - 60}{4,899}) - \Phi(\frac{70 - 60}{4,899})] + \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - 70}{4,5826}) - \Phi(\frac{70 - 70}{4,5826})] \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(8,16) - \Phi(2,04) + \Phi(6,55) - \Phi(0)] = \frac{1}{2}(0,5 - 0,47932 + 0,5) = 0,2603
\end{aligned}$$

b) Giả sử công nhân X dự thi 50 lần. Số lần được thưởng tin chắc nhất là bao nhiêu?

Gọi Z là ĐLNN chỉ số lần công nhân X được thưởng. Khi đó Z có phân phối nhị thức $Z \sim B(n, p)$ với $n = 50$, $p = 0,2603$. Số lần được thưởng tin chắc nhất chính là $\text{Mod}(Z)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\text{Mod}(Z) = k &\Leftrightarrow np - q \leq k \leq np - q + 1 \\
&\Leftrightarrow 50 \cdot 0,2603 - 0,7397 \leq k \leq 50 \cdot 0,2603 - 0,7397 + 1 \\
&\Leftrightarrow 12,2753 \leq k \leq 13,2753 \Leftrightarrow k = 13
\end{aligned}$$

Vậy số lần được thưởng tin chắc nhất của công nhân X là 13 lần.

Bài 2.9: Trong ngày hội thi, mỗi chiến sĩ sẽ chọn ngẫu nhiên một trong hai loại súng và với khẩu súng chọn được sẽ bắn 100 viên đạn. Nếu có từ 65 viên trở lên trúng bia thì được thưởng. Giả sử đối với chiến sĩ A, xác suất bắn 1 viên trúng bia bằng khẩu súng loại I là 60% và bằng khẩu súng loại II là 50%.

- Tính xác suất để chiến sĩ A được thưởng.
- Giả sử chiến sĩ A dự thi 10 lần. Hỏi số lần được thưởng tin chắc nhất là bao nhiêu?
- Chiến sĩ A phải tham gia hội thi ít nhất bao nhiêu lần để xác suất có ít nhất một lần được thưởng không nhỏ hơn 98%?

Lời giải

Gọi X là ĐLNN chỉ số viên trúng trong 100 viên được bắn ra. Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố chọn được khẩu súng loại I, II. Khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, với mỗi $0 \leq k \leq 100$, ta có:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(A_1)P(X=k/A_1) + P(A_2)P(X=k/A_2) \\
&= \frac{1}{2}P(X=k/A_1) + \frac{1}{2}P(X=k/A_2) \quad (1)
\end{aligned}$$

Như vậy, gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số viên trúng trong 100 viên được bắn ra trong trường hợp chọn được khẩu loại I, II. Khi đó:

- (1) cho ta $P(X = k) = \frac{1}{2}P(X_1=k) + \frac{1}{2}P(X_2=k)$
- X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ với $n_1 = 100$, $p_1 = 0,6$. Vì $n_1 = 100$ khá lớn và $p_1 = 0,6$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_1 có phân phối chuẩn như sau:
 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
với $\mu_1 = n_1 p_1 = 100 \cdot 0,6 = 60$;
 $\sigma_1 = \sqrt{n_1 p_1 q_1} = \sqrt{100 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 4,8990$.
- X_2 có phân phối nhị thức $X_2 \sim B(n_2, p_2)$ với $n_2 = 100$, $p_2 = 0,5$. Vì $n_2 = 100$ khá lớn và $p_2 = 0,5$ không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X_2 có phân phối chuẩn như sau:
 $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
với $\mu_2 = n_2 p_2 = 100 \cdot 0,5 = 50$;
 $\sigma_2 = \sqrt{n_2 p_2 q_2} = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5$.

a) Xác suất để chiến sĩ A được thưởng là:

$$\begin{aligned}
P(65 \leq X \leq 100) &= \frac{1}{2}P(65 \leq X_1 \leq 100) + \frac{1}{2}P(65 \leq X_2 \leq 100) \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - \mu_1}{\sigma_1}) - \Phi(\frac{65 - \mu_1}{\sigma_1})] + \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - \mu_2}{\sigma_2}) - \Phi(\frac{65 - \mu_2}{\sigma_2})] \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - 60}{4,899}) - \Phi(\frac{65 - 60}{4,899})] + \frac{1}{2}[\Phi(\frac{100 - 50}{5}) - \Phi(\frac{65 - 50}{5})] \\
&= \frac{1}{2}[\Phi(8,16) - \Phi(1,02) + \Phi(10) - \Phi(3)] = \frac{1}{2}(0,5 - 0,34614 + 0,5 - 0,49865) = 0,0776.
\end{aligned}$$

b) Giả sử chiến sĩ A dự thi 10 lần. Số lần được thưởng tin chắc nhất là bao nhiêu?

Gọi Y là ĐLNN chỉ số lần chiến sĩ A được thưởng. Khi đó Y có phân phối nhị thức $Y \sim B(n, p)$ với $n = 10$, $p = 0,0776$. Số lần được thưởng tin chắc nhất chính là $\text{mod}(Y)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\text{mod}(Y) = k &\Leftrightarrow np - q \leq k \leq np - q + 1 \\
&\Leftrightarrow 10 \cdot 0,0776 - 0,9224 \leq k \leq 10 \cdot 0,0776 - 0,9224 + 1 \\
&\Leftrightarrow -0,1464 \leq k \leq 0,8536 \Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

Vậy số lần được thưởng tin chắc nhất của chiến sĩ A là 0 lần, nói cách khác, thường là chiến sĩ A không được thưởng lần nào trong 10 lần tham gia.

c) Chiến sĩ A phải tham gia hội thi ít nhất bao nhiêu lần để xác suất có ít nhất một lần được thưởng không nhỏ hơn 98%?

Gọi n là số lần tham gia hội thi và D là biến cố có ít nhất 1 lần được thưởng. Yêu cầu bài toán là xác định n nhỏ nhất sao cho $P(D) \geq 0,98$.

Biến cố đối lập của D là \bar{D} : không có lần nào được thưởng.

Theo chứng minh trên, xác suất để một lần được thưởng là $p = 0,0776$.

Do đó

Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - q^n = 1 - (1 - 0,0776)^n = 1 - (0,9224)^n.$$

Suy ra

$$P(D) \geq 0,98 \Leftrightarrow 1 - (0,9224)^n \geq 0,98$$

$$\Leftrightarrow (0,9224)^n \leq 0,02$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,9224 \leq \ln 0,02$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,02}{\ln 0,9224} \approx 48,43$$

$$\Leftrightarrow n \geq 49.$$

Vậy chiến sĩ A phải tham gia hội thi ít nhất là 49 lần.

Bài 2.10: Một người thợ săn bắn 4 viên đạn. Biết xác suất trúng đích của mỗi viên đạn bắn ra là 0,8. Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số viên đạn trúng đích.

a) Tìm luật phân phối của X.

b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Lời giải

a) Ta thấy X có phân phối nhị thức $X \sim B(n,p)$ với $n = 4$, $p = 0,8$. X là ĐLNN rời rạc nhận 5 giá trị: 0, 1, 2, 3, 4. Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3	4
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(X = 0) = C_4^0(0,8)^0(0,2)^4 = 0,0016;$$

$$P(X = 1) = C_4^1(0,8)^1(0,2)^3 = 0,0256;$$

$$P(X = 2) = C_4^2(0,8)^2(0,2)^2 = 0,1536;$$

$$P(X = 3) = C_4^3(0,8)^3(0,2)^1 = 0,4096;$$

$$P(X = 4) = C_4^4(0,8)^4(0,2)^0 = 0,4096.$$

Vậy luật phân phối của X là:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

- Kỳ vọng: $M(X) = np = 3,2$.

- Phương sai: $D(X) = npq = 0,64$.

Bài 2.11: Có hai lô hàng I và II, mỗi lô chứa rất nhiều sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm loại A có trong hai lô I và II lần lượt là 70% và 80%. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô 2 sản phẩm.

a) Tính xác suất để số sản phẩm loại A lấy từ lô I lớn hơn số sản phẩm loại A lấy từ lô II.

b) Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 4 sản phẩm được lấy ra. Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Lời giải

Gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số sp loại A có trong 2 sp được chọn ra từ lô I, II. Khi đó

• X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$; $n_1 = 2$; $p_1 = 70\% = 0,7$ với các xác suất định bởi:

$$P(X_1 = k) = C_2^k(0,7)^k(0,3)^{2-k}$$

Cụ thể

X_1	0	1	2
P	0,09	0,42	0,49

• X_2 có phân phối nhị thức $X_2 \sim B(n_2, p_2)$; $n_2 = 2$; $p_2 = 80\% = 0,8$ với các xác suất định bởi:

$$P(X_2 = k) = C_2^k(0,8)^k(0,2)^{2-k}$$

Cụ thể

X_2	0	1	2
P	0,04	0,32	0,64

a) Xác suất để số sản phẩm loại A lấy từ lô I lớn hơn số sản phẩm loại A lấy từ lô II là:

$$P(X_1 \geq X_2) = P[(X_1=2)(X_2=0) + (X_1=2)(X_2=1) + (X_1=1)(X_2=0)] \\ = P(X_1=2)P(X_2=0) + P(X_1=2)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=0) = 0,1932.$$

b) Gọi X là số sp loại A có trong 4 sp chọn ra. Khi đó

$$X = X_1 + X_2$$

Vì X_1, X_2 độc lập nên ta có:

- Kỳ vọng của X là $M(X) = M(X_1) + M(X_2) = n_1p_1 + n_2p_2 = 3$
- Phương sai của X là $D(X) = D(X_1) + D(X_2) = n_1p_1q_1 + n_2p_2q_2 = 0,74.$

Bài 2.12: Cho hai hộp I và II, mỗi hộp có 10 bi; trong đó hộp I gồm 6 bi đỏ, 4 bi trắng và hộp II gồm 7 bi đỏ, 3 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp hai bi.

- a) Tính xác suất để được hai bi đỏ và hai bi trắng.
- b) Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số bi đỏ có trong 4 bi được rút ra. Tìm luật phân phối của X.

Lời giải

Gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số bi đỏ có trong 2 bi được chọn ra từ hộp I, hộp II. Khi đó

- X_1 có phân phối siêu bội $X_1 \sim H(N_1, N_{1A}, n_1); N_1 = 10; N_{1A} = 6; n_1 = 2$ với các xác suất định bởi:

$$P(X_1 = k) = \frac{C_6^k C_4^{2-k}}{C_{10}^2}.$$

Cụ thể

X_1	0	1	2
P	6/45	24/45	15/45

- X_2 có phân phối siêu bội $X_2 \sim H(N_2, N_{2A}, n_2); N_2 = 10; N_{2A} = 7; n_2 = 2$

với các xác suất định bởi:

$$P(X_2 = k) = \frac{C_7^k C_3^{2-k}}{C_{10}^2}.$$

Cụ thể

X_2	0	1	2
P	3/45	21/45	21/45

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số bi đỏ có trong 4 bi được rút ra. Khi đó

$$X = X_1 + X_2$$

Bảng giá trị của X dựa vào X_1, X_2 như sau:

X	X_2	0	1	2
X_1				
0		0	1	2
1		1	2	3
2		2	3	4

a) Xác suất để được 2 bi đỏ và 2 bi trắng là:

$$P(X = 2) = P[(X_1=0)(X_2=2) + (X_1=1)(X_2=1) + (X_1=2)(X_2=0)] \\ = P(X_1=0)P(X_2=2) + P(X_1=1)P(X_2=1) + P(X_1=2)P(X_2=0) \\ = (6/45)(21/45) + (24/45)(21/45) + (15/45)(3/45) = 1/3.$$

b) Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3	4
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

trong đó:

$$p_0 = P(X = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 2/225; \\ p_1 = P(X = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = 22/225; \\ p_2 = P(X = 2) = 1/3; \\ p_3 = P(X = 3) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) = 91/225; \\ p_4 = P(X = 4) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = 7/45.$$

Vậy luật phân phối của X là :

X	0	1	2	3	4
P	2/225	22/225	1/3	91/225	7/45

Bài 2.13: Một máy sản xuất sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm 10%. Một lô hàng gồm 10 sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm 30%. Cho máy sản xuất 3 sản phẩm và từ lô hàng lấy ra 3 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm tốt có trong 6 sản phẩm này.

- a) Tìm luật phân phối của X.
b) Không dùng luật phân phối của X, hãy tính $M(X)$, $D(X)$.

Lời giải

Gọi X_1, X_2 lần lượt là các ĐLNN chỉ số sp tốt có trong 3 sản phẩm do máy sản xuất; do lấy từ lô hàng. Khi đó X_1, X_2 độc lập và ta có:

- X_1 có phân phối nhị thức $X_1 \sim B(n_1, p_1)$; $n_1 = 3$; $p_1 = 0,9$. Cụ thể ta có:

$$P(X_1 = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0,1)^3 = 0,001;$$

$$P(X_1 = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3(0,9)(0,1)^2 = 0,027;$$

$$P(X_1 = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3(0,9)^2(0,1) = 0,243;$$

$$P(X_1 = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,9)^3 = 0,729.$$

- X_2 có phân phối siêu bội $X_2 \sim H(N_2, N_{2A}, n_2)$; $N_2 = 10$; $N_{2A} = 7$; $n_2 = 3$ (vì lô hàng gồm 10 sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm là 30%, nghĩa là lô hàng gồm 7 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu). Cụ thể ta có:

$$P(X_2 = 0) = \frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120};$$

$$P(X_2 = 1) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{120};$$

$$P(X_2 = 2) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120};$$

$$P(X_2 = 3) = \frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}.$$

- a) Ta có $X = X_1 + X_2$. Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

trong đó:

$$p_0 = P(X = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 1/120000;$$

$$p_1 = P(X = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = 1/2500;$$

$$p_2 = P(X = 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) = 291/40000$$

$$p_3 = P(X = 3) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 3) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 0) = 473/7500$$

$$p_4 = P(X = 4) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 3) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) = 10521/40000$$

$$p_5 = P(X = 5) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 2) = 567/1250$$

$$p_6 = P(X = 6) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 3) = 1701/8000.$$

Vậy luật phân phối của X là:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	1/120000	1/2500	291/40000	473/7500	10521/40000	576/1250	1701/8000

- b) Vì $X = X_1 + X_2$ và X_1, X_2 độc lập nên ta có:
- Kỳ vọng của X là $M(X) = M(X_1) + M(X_2) = n_1 p_1 + n_2 p_2 = 4,8$ (với $p_2 = N_{2A}/N_2$)
- Phương sai của X là $D(X) = D(X_1) + D(X_2) = n_1 p_1 q_1 + n_2 p_2 q_2 (N_2 - n_2) / (N_2 - 1) = 0,76$.

Bài 2.14: Cho hai hộp I và II, mỗi hộp có 10 bi; trong đó hộp I gồm 8 bi đỏ, 2 bi trắng và hộp II gồm 6 bi đỏ, 4 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ hộp I hai bi bỏ sang hộp II, sau đó rút ngẫu nhiên từ hộp II ba bi.

- a) Tính xác suất để được cả 3 bi trắng.
b) Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số bi trắng có trong ba bi được rút ra từ hộp II. Tìm luật phân phối của X. Xác định kỳ vọng và phương sai của X.

Lời giải

Gọi X là ĐLNN chỉ số bi trắng có trong 3 bi rút ra từ hộp II. A_i ($i = 0, 1, 2$) là biến cố có i bi trắng và (2-i) bi đỏ có trong 2 bi lấy ra từ hộp I. Khi đó A_0, A_1, A_2 là hệ biến cố đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có:

$$P(A_0) = \frac{C_2^0 C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45};$$

$$P(A_1) = \frac{C_2^1 C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$P(A_2) = \frac{C_2^2 C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}.$$

Với mỗi $k = 0, 1, 2, 3$ theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(X = k) = P(A_0)P(X = k/A_0) + P(A_1)P(X = k/A_1) + P(A_2)P(X = k/A_2)$$

a) Xác suất để được cả ba bi trắng là:

$$P(X = 3) = P(A_0)P(X = 3/A_0) + P(A_1)P(X = 3/A_1) + P(A_2)P(X = 3/A_2)$$

Mà

$$P(X = 3 / A_0) = \frac{C_4^3 C_8^0}{C_{12}^3} = \frac{4}{220};$$

$$P(X = 3 / A_1) = \frac{C_5^3 C_7^0}{C_{12}^3} = \frac{10}{220};$$

$$P(X = 3 / A_2) = \frac{C_6^3 C_6^0}{C_{12}^3} = \frac{20}{220}.$$

nên $P(X = 3) = 73/2475$.

b) Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3
P	p_0	p_1	p_2	p_3

trong đó, tương tự như trên ta có:

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{28}{45} \cdot \frac{C_4^0 C_8^3}{C_{12}^3} + \frac{16}{45} \cdot \frac{C_5^0 C_7^3}{C_{12}^3} + \frac{1}{45} \cdot \frac{C_6^0 C_6^3}{C_{12}^3} = 179 / 825;$$

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{28}{45} \cdot \frac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3} + \frac{16}{45} \cdot \frac{C_5^1 C_7^2}{C_{12}^3} + \frac{1}{45} \cdot \frac{C_6^1 C_6^2}{C_{12}^3} = 223 / 450;$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{28}{45} \cdot \frac{C_4^2 C_8^1}{C_{12}^3} + \frac{16}{45} \cdot \frac{C_5^2 C_7^1}{C_{12}^3} + \frac{1}{45} \cdot \frac{C_6^2 C_6^1}{C_{12}^3} = 1277 / 4950;$$

$$p_3 = P(X = 3) = 73/2475.$$

Suy ra luật phân phối của X là:

X	0	1	2	3
P	179/825	223/450	1277/4950	73/2475

Từ đó suy ra kỳ vọng của X là $M(X) = 1,1$ và phương sai của X là $D(X) = 0,5829$.

Bài 2.15: Có ba lô sản phẩm, mỗi lô có 20 sản phẩm. Lô thứ i có $i+4$ sản phẩm loại A ($i = 1, 2, 3$).

a) Chọn ngẫu nhiên một lô rồi từ lô đó lấy ra 3 sản phẩm. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 sản phẩm loại A.

b) Từ mỗi lô lấy ra 1 sản phẩm. Gọi X là tổng số sản phẩm loại A có trong 3 sản phẩm được lấy ra. Tìm luật phân phối của X và tính $M(X)$, $D(X)$.

Lời giải

a) Gọi C là biến cố trong 3 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 sản phẩm loại A.

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố chọn được lô I, II, III. Khi đó A_1, A_2, A_3 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$.

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(C) = P(A_1)P(C/A_1) + P(A_2)P(C/A_2) + P(A_3)P(C/A_3)$$

Theo Công thức xác suất lựa chọn:

$$P(C/A_1) = \frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{525}{1140};$$

$$P(C/A_2) = \frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3} = \frac{546}{1140};$$

$$P(C/A_3) = \frac{C_7^1 C_{13}^2}{C_{20}^3} = \frac{546}{1140}.$$

Suy ra $P(C) = 0,4728$.

b) Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3
P	p_0	p_1	p_2	p_3

Gọi B_j ($j = 1, 2, 3$) là biến cố lấy được sp loại A từ lô thứ j. Khi đó B_1, B_2, B_3 độc lập và

$$P(B_1) = \frac{5}{20}; P(\bar{B}_1) = \frac{15}{20};$$

$$P(B_2) = \frac{6}{20}; P(\bar{B}_2) = \frac{14}{20};$$

$$P(B_3) = \frac{7}{20}; P(\bar{B}_3) = \frac{13}{20}.$$

Ta có

$$- "X = 0" = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \Rightarrow P(X = 0) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) = 273/800$$

$$- "X = 1" = B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3 \Rightarrow$$

$$P(X = 1) = P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) = 71/160$$

$$- "X = 2" = B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 B_3 \Rightarrow$$

$$P(X = 2) = P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) = 151/800$$

$$- "X = 3" = B_1 B_2 B_3 \Rightarrow P(X = 3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 21/800$$

Vậy luật phân phối của X là

X	0	1	2	3
P	273/800	71/160	151/800	21/800

Từ luật phân phối của X ta suy ra mode, kỳ vọng và phương sai của X :

- Mode: $\text{Mod}(X) = 1$.
- Kỳ vọng: $M(X) = 0,9$.
- Phương sai: $D(X) = 0,625$.

2.16: Một người có 5 chìa khóa bề ngoài rất giống nhau, trong đó chỉ có 2 chìa mở được cửa. Người đó tìm cách mở cửa bằng cách thử từng chìa một cho đến khi mở được cửa thì thôi (tất nhiên, chìa nào không mở được thì loại ra). Gọi X là số chìa khóa người đó sử dụng. Tìm luật phân phối của X. Hỏi người đó thường phải thử bao nhiêu chìa mới mở được cửa? Trung bình người đó phải thử bao nhiêu chìa mới mở được cửa?

Lời giải

Ta thấy X là ĐLNN rời rạc nhận 4 giá trị: 1, 2, 3, 4. Luật phân phối của X có dạng:

X	1	2	3	4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Gọi A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) là biến cố chìa khóa chọn lần thứ j mở được cửa. Khi đó:

$$P(X=1) = P(A_1) = 2/5.$$

$$P(X = 2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 / \bar{A}_1) = (3/5)(2/4) = 3/10;$$

$$P(X = 3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1)P(A_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2) = (3/5)(2/4)(2/3) = 1/5$$

$$P(X = 4) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2)P(A_4 / \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \\ = (3/5)(2/4)(1/3)(2/2) = 1/10$$

Vậy luật phân phối của X là:

X	1	2	3	4
P	2/5	3/10	1/5	1/10

Từ luật phân phối trên ta suy ra:

- Mode của X là $\text{Mod}(X) = 1$.
- Kỳ vọng của X là $M(X) = \sum x_i p_i = 2$.

Vậy người đó thường phải thử 1 chìa thì mở được cửa. Trung bình người đó phải thử 2 chìa mới mở được cửa.

Bài 2.17: Một người thợ săn có 5 viên đạn. Người đó đi săn với nguyên tắc: nếu bắn trúng mục tiêu thì về ngay, không đi săn nữa. Biết xác suất

trúng đích của mỗi viên đạn bắn ra là 0,8. Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số viên đạn người ấy sử dụng trong cuộc săn.

- a) Tìm luật phân phối của X.
b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Lời giải

a) Ta thấy X là ĐLNN rời rạc nhận 5 giá trị: 1, 2,..., 5. Luật phân phối của X có dạng:

X	1	2	3	4	5
P	p ₁	p ₂	p ₃	p ₄	p ₅

Gọi A_j (j = 1,2,..., 5) là biến cố viên đạn thứ j trúng đích. Khi đó:

$$P(A_j) = 0,8; P(\bar{A}_j) = 0,2$$

Ta có:

- $P(X=1) = P(A_1) = 0,8$;
 $P(X = 2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$;
 $P(X = 3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032$;
 $P(X = 4) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,0064$;
 $P(X = 5) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0016$.

Vậy luật phân phối của X là:

X	1	2	3	4	5
P	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,0016

- b) Từ luật phân phối của X ta suy ra:
 - Kỳ vọng của X là $M(X) = 1,2496$.
 - Phương sai của X là $D(X) = 0,3089$.

Bài 2.18: Một người thợ săn có 4 viên đạn. Người đó đi săn với nguyên tắc: nếu bắn 2 viên trúng mục tiêu về ngay, không đi săn nữa. Biết xác suất trúng đích của mỗi viên đạn bắn ra là 0,8. Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số viên đạn người ấy sử dụng trong cuộc săn.

- a) Tìm luật phân phối của X.
b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Lời giải

a) Ta thấy X là ĐLNN rời rạc nhận 3 giá trị: 2, 3, 4. Luật phân phối của X có dạng:

X	2	3	4
P	p ₂	p ₃	p ₄

Gọi A_j (j = 1,2, 3, 4) là biến cố viên đạn thứ j trúng đích. Khi đó:

$$P(A_j) = 0,8; P(\bar{A}_j) = 0,2$$

Ta có:

$$P(X = 2) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$$

$$P(X = 3) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) \\ = P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,256$$

$$P(X = 4) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) \\ = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,104$$

Vậy luật phân phối của X là:

X	2	3	4
P	0,64	0,256	0,104

- b) Từ luật phân phối của X ta suy ra:
 - Kỳ vọng của X là $M(X) = 2,464$.
 - Phương sai của X là $D(X) = 0,456704$.