

XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. CÁC TÍNH CHẤT

Quy ước: với A, B, C là 3 biến cố bất kỳ

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A + \Omega = \Omega$$

$$A + \emptyset = A$$

$$A + A = A$$

$$A + B = B + A$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$A \cdot \Omega = A$$

$$A \cdot \emptyset = \emptyset$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

II. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

Định lý 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad \text{nếu } A \cdot B = \emptyset$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Định lý 2:

Cho A_1, A_2, \dots, A_n là một họ xung khắc

$$\text{Ta có: } P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Định lý 3: (Công thức cộng xác suất)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Mở rộng:

$$1. \quad P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

$$2. \quad P(A + B + C + D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(AB) - P(BC) - P(BD) - P(CA) - P(CD) - P(AD) + P(ABC) + P(BCD) + P(CDA) + P(DAB) - P(ABCD)$$

III. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Định lý 4: (Công thức nhân xác suất)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(A/B) = P(B) \cdot P(B/A)$$

Tổng quát:

$$P(ABC) = P(A/BC) \cdot P(B/C) \cdot P(C)$$

$$P(ABCD) = P(A/BCD) \cdot P(B/CD) \cdot P(C/D) \cdot P(D)$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$$

IV. SỰ ĐỘC LẬP

A, B độc lập nhau nếu: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

V. CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ

Định lý 6: (Công thức đầy đủ)

$$P(F) = P(A_1)P(F/A_1) + \dots + P(A_n)P(F/A_n)$$

Định lý 7: (Công thức Bayès)

$$P(A_i/F) = \frac{P(A_i)P(F/A_i)}{P(F)}$$

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN VÀ HÀM CỦA ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

I. BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Cho X là ĐLNN rời rạc, ta có:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ và } P(X = x_i) = p_i$$

Bảng sau đây:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

được gọi là bảng phân phối xác suất của ĐLNN rời rạc X .

II. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Định nghĩa: Cho X là một ĐLNN.

Ánh xạ $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ định bởi

$$x \rightarrow F(x) = P(X < x)$$

được gọi là hàm phân phối xác suất của ĐLNN X .

Mệnh đề 1: Cho X là ĐLNN rời rạc, có:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ và } p_i = P(X = x_i), \text{ và } F(x) \text{ là hàm phân phối xác suất của } X.$$

Ta có:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < x_1 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_i & \text{nếu } x_i < x < x_{i+1} \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 & \text{nếu } x_n < x \end{cases}$$

Mệnh đề 2: Cho X là ĐLNN liên tục có $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của nó. Ta có:

1) $F(x)$ là hàm tăng và liên tục.

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Mệnh đề 3: Cho X là ĐLNN rời rạc, có:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, p_i = P(X = x_i), \text{ và } F(x) \text{ là hàm phân phối xác suất của } X.$$

Ta có:

$$1) P(X = x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$2) P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Mệnh đề 4: Cho X là ĐLNN liên tục có $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của nó. Ta có:

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

III. HÀM MẬT ĐỘ

Định nghĩa: Cho X là ĐLNN liên tục có $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của nó. Hàm sau đây:

$$f(x) = F'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

được gọi là hàm mật độ của ĐLNN liên tục X .

Định lý: (Tính chất của hàm mật độ)

Cho $f(x)$ là hàm mật độ và $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của ĐLNN liên tục X . Ta có:

$$1) \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$3) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

IV. KỶ VỌNG, PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN

❖ X là ĐLNN rời rạc có bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Kỳ vọng của X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Kỳ vọng của X^2 :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

Phương sai của X :

$$D(X) = \text{var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

❖ X là ĐLNN liên tục có hàm mật độ xác suất $f(x)$:

Kỳ vọng của X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Kỳ vọng của X^2 :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

Phương sai của X :

$$D(X) = \text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

❖ Độ lệch chuẩn của X: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$
 $\sigma(X)$ cùng đơn vị đo với X

Định lý 1:

- 1) $E(C) = C$ với C : ĐLNN hằng số
- 2) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- 3) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- 4) $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ nếu X, Y độc lập nhau

Định lý 2:

- 1) $D(C) = 0$ với C : ĐLNN hằng số
- 2) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- 3) $D(\lambda X) = \lambda^2.D(X)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- 4) $D(X + \lambda) = D(X)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- 5) $D(X) \geq 0$, $\forall X$
 $D(X) = 0 \Leftrightarrow X$: ĐLNN hằng số
- 6) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ nếu X, Y độc lập nhau

CÁC QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

I. PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

Ký hiệu: $X \sim B(n, p)$

Công thức xác suất:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad ; \quad q = 1 - p \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Tính chất:

$$E(X) = np; D(X) = npq$$
$$np - q \leq \text{mod}(X) \leq np - q + 1$$

II. PHÂN PHỐI SIÊU BỘI

Ký hiệu: $X \sim H(N, M, n)$

Công thức xác suất:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Tính chất:

$$E(X) = np \left(\text{với } p = \frac{M}{N} \text{ và } q = 1 - p \right); D(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$\frac{N-n}{N-1}$ gọi là hệ số hiệu chỉnh

III. PHÂN PHỐI POISSON

Ký hiệu: $X \sim P(\lambda)$

Công thức xác suất:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad ; \quad (\lambda > 0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Tính chất:

$$E(X) = D(X) = \lambda$$
$$\lambda - 1 \leq \text{mod}(X) \leq \lambda$$

IV. PHÂN PHỐI CHUẨN

Ký hiệu: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{Hàm mật độ: } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tính chất 1:

$$E(X) = \mu; D(X) = \sigma^2; \text{mod}(X) = \text{med}(X) = \mu$$

Tính chất 2:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq \alpha) = 0,5 + \phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > \alpha) = 1 - P(X \leq \alpha) = 0,5 - \phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) = 2\phi(k)$$

V. CÁC CÔNG THỨC XẤP XỈ

1. $X \sim H(N, M, n)$ (X có phân phối siêu bội)

Khi n nhỏ hơn rất nhiều so với N ($n \ll N$) ta xấp xỉ: $X \sim B(n, p)$ với $p = M/N$

2. $X \sim B(n, p)$ (X có phân phối nhị thức)

a) Khi n lớn, p nhỏ gần 0 thì ta xấp xỉ: $X \sim P(np)$

Thông thường: $X \sim B(n, p)$ có $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ và $np \leq 5$ thì ta xấp xỉ $X \sim P(np)$

b) Khi n lớn, p không quá gần 0 và 1 thì ta xấp xỉ: $X \sim N(np, npq)$ với $q = 1 - p$

$$P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(k_1 < X < k_2) = \phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Thông thường: $X \sim B(n, p)$ có $n \geq 30$, p gần 0,5; $np \geq 5$ và $npq \geq 5$ thì ta xấp xỉ $X \sim N(np, npq)$

VI. CÁC ĐỊNH LÝ

X_1, X_2 là 2 đại lượng ngẫu nhiên độc lập

1) $X_1 \sim B(n_1, p)$ và $X_2 \sim B(n_2, p) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$

2) $X_1 \sim P(\lambda_1)$ và $X_2 \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ và $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

4) $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ và $X_2 \sim \chi^2(n_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

χ^2 : phân phối chi (khi) bình phương

5) $X_1 \sim N(0, 1)$ và $X_2 \sim N(0, 1) \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2)$

TÓM TẮT CÔNG THỨC THỐNG KÊ

I. ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ

A. Ước lượng trung bình μ với độ tin cậy γ

1) $n \geq 30$

1.1 Biết σ :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1.2 Không biết σ :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

2) $n < 30$

2.1 Biết σ :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.2 Không biết σ :

$$\bar{x} - [t_{\alpha/2}(n-1)] \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + [t_{\alpha/2}(n-1)] \frac{s}{\sqrt{n}}$$

B. Ước lượng tỷ lệ p với độ tin cậy γ

$$f - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq p \leq f + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

C. Ước lượng phương sai σ^2 với độ tin cậy γ

1) Biết kỳ vọng μ :

$$\frac{\sum n_i (x_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum n_i (x_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}$$

2) Không biết kỳ vọng μ :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}$$

II. KIỂM ĐỊNH THAM SỐ (KIỂM ĐỊNH 2 PHÍA)

A. Kiểm định trung bình, với mức ý nghĩa α

Đặt giả thiết:

$$\begin{cases} H: \mu = \mu_0 \\ \bar{H}: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

1) $n \geq 30$, σ^2 đã biết (hoặc $n < 30$, σ đã biết, X có phân phối chuẩn)

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0| \sqrt{n}}{\sigma}$$

Kết luận:

$|t| \leq t_{\alpha/2}$: chấp nhận H

$|t| > t_{\alpha/2}$: bác bỏ H

2) $n \geq 30$, σ^2 chưa biết

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0| \sqrt{n}}{s}$$

Kết luận:

$|t| \leq t_{\alpha/2}$: chấp nhận H

$|t| > t_{\alpha/2}$: bác bỏ H

3) $n < 30$, σ chưa biết, X có phân phối chuẩn

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0| \sqrt{n}}{s}$$

Kết luận:

$|t| \leq t_{\alpha/2}^{(n-1)}$: chấp nhận H

$|t| > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$: bác bỏ H

B. Kiểm định tỷ lệ, với mức ý nghĩa α

Đặt giả thiết:

$$\begin{cases} H: p = p_0 \\ \bar{H}: p \neq p_0 \end{cases}$$
$$|t| = \frac{|f - p_0| \sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$$

Kết luận:

$|t| \leq t_{\alpha/2}$: chấp nhận H

$|t| > t_{\alpha/2}$: bác bỏ H

C. Kiểm định phương sai, với mức ý nghĩa α

Đặt giả thiết:

$$\begin{cases} H: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \bar{H}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Kết luận:

$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$: chấp nhận H

$\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ hoặc $\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$: bác bỏ H