Chương 1

GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ Ý NGHĨA CỦA MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

1.1. Các khái niệm

Mô hình của một đối tượng là sự phản ánh hiện thực khách quan của đối tượng đó theo cách hình dung, tưởng tượng, suy nghĩ ở các góc độ, ở các mức độ của người nghiên cứu. Nó được trình bày, thể hiện, diễn đạt bằng lời, chữ viết, sơ đồ, hình vẽ, biểu thức toán…

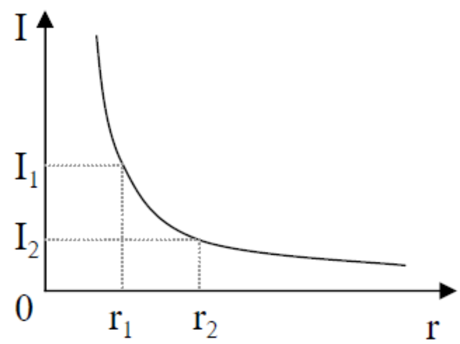
Mô hình kinh tế: là mô hình phản ánh các đối tượng hoạt động trong lĩnh vực kinh tế.

Mô hình toán kinh tế: là mô hình kinh tế được trình bày bằng ngôn ngữ toán học, trong mô hình toán kinh tế có sử dụng các phương trình, bất phương trình, để mô tả đối tượng hay quá trình kinh tế. Cơ sở của mô hình toán kinh tế là các học thuyết kinh tế.

Ví dụ 1: Mô hình đầu tư

Mô hình bằng lời: Trong nền kinh tế, tổng vốn đầu tư phụ thuộc vào lãi suất ngân hàng và chúng có quan hệ ngược chiều nhau, nghĩa là khi lãi suất ngân hàng tăng thì tổng vốn đầu tư giảm và ngược lại, khi lãi suất ngân hàng giảm thì tổng vống đầu tư tăng.

Mô hình bằng hình vẽ:



Mô hình toán kinh tế:

Gọi I : là tổng vốn đầu tư, r : là lãi suất ngân hàng.

Mối quan hệ của tổng vốn đầu tư (I) theo lãi suất ngân hàng (r) được biểu diễn dưới dạng hàm số như sau $I = f(r)$. Trong đó $\frac{dI}{dr} \le 0$.

Dạng đơn giản $I = a + br,\ a > 0,\ b < 0$.

1.2. Ý nghĩa của phương pháp mô hình

Phương pháp mô hình là phương pháp sử dụng mô hình của đối tượng để phân tích, suy luận cũng như đưa ra kết quả dự báo.

Trong nghiên cứu các vấn đề về kinh tế, xã hội, phương pháp mô hình giúp chúng ta giảm chi phí, và phát huy tính hiệu quả của tư duy logic, kết hợp phân tích truyền thống với phận tích hiện đại, giữa định tính với định lượng.

2. CẤU TRÚC MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ.

2.1. Các biến số, tham số trong mô hình.

Người ta dùng các các đại lượng X, Y, Z,…, để biểu diễn các yếu tố kinh tế và lượng hóa chúng.

Các biến số trong mô hình được phân loại như sau:

a) Biến định lượng và biến định tính

Biến định lượng là biến đại diện cho các yếu tố mang tính chất định lượng chúng thể hiện qua mặt chất lượng, ví dụ như các biến thể hiện chi phí, hiệu quả, lợi nhuận, sản lượng… và chúng được đo bằng các đơn vị vật lý và cơ học.

Biến định tính là biến biểu thị thuộc tính, đặc điểm, tính chất…của sự vật hiện tượng trong mô hình ở các cấp độ khác nhau, ví dụ biến biểu thị giới tính, trình độ tay nghề, trình độ học vấn…

b) Biến nội sinh (biến phụ thuộc, biến được giải thích). Là các biến thể hiện trực tiếp các sự kiện, hiện tượng kinh tế, mà giá trị của chúng phụ thuộc vào các biến khác trong mô hình.

c) Biến ngoại sinh (biến độc lập, biến giải thích). Là các biến độc lập với các biến khác trong mô hình, và giá trị của chúng được xem là tồn tại ngoài mô hình.

d) Tham số (thông số). Là biến số phản ánh xu hướng, mức độ ảnh hưởng của các biến đến biến nội sinh. Tham số tương đối ổn định và ít thay đổi trong mô hình.

Thí dụ 2: Một doanh nghiệp muốn sản xuất một khối lượng hàng hóa loại A là Q, thì cần có n yếu tố đầu vào $X_1, X_2, ..., X_n$. Các yếu tố kinh tế này liên hệ với nhau bởi quan hệ hàm số $Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha, \beta\right)$. Khi đó ta có mô hình hàm sản xuất của doanh nghiệp:

$$Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha, \beta\right),\ X_i \geq 0, \forall i$$

Trong mô hình này Q là biến phụ thuộc, X_i là các biến độc lập α, β là các tham số.

2.2. Mối liên hệ giữa các biến số trong mô hình

Để mô tả các mối quan hệ kinh tế, các quy luật kinh tế trong các mô hình toán kinh tế người ta thường dùng các phương trình hoặc bất phương trình.

Phương trình định nghĩa thể hiện quan hệ định nghĩa giữa các biến.

Phương trình hành vi mô tả quan hệ giữa các biến do tác động của các quy luật kinh tế, hoặc do giả thiết.

Phương trình điều kiện mô tả quan hệ giữa các biến trong tình huống có điều kiện.

Thí dụ 3:

Phương trình định nghĩa: $\pi = TR - TC$ (lợi nhuận=doanh thu−chi phí); $NX = EX - IM$ (Xuất khẩu ròng=xuất khẩu−nhập khẩu).

Phương trình hành vi: Trong mô hình $Q_S = S(Q)$; $Q_D = D(Q)$; $Q_S = Q_D$.

Phương trình điều kiện: Trong mô hình hàm sản xuất bất phương trình $X_i \geq 0$ là bất phương trình điều kiện.

3. PHÂN LOẠI MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ.

3.1. Phân loại mô hình theo đặc điểm cấu trúc và công cụ toán học sử dụng.

a) Mô hình tối ưu

Mô hình phản ánh sự lựa chọn cách thức hoạt động nhằm tối ưu hóa (tối thiểu hoặc tối đại) một hoặc nhiều chỉ tiêu định trước. Cấu trúc cơ bản của mô hình là bài toán tối ưu gồm bài toán quy hoạch và bài toán điều khiển tối ưu. Phương pháp sử dụng chính là phương pháp tối ưu trong toán học.

b) Mô hình cân bằng

Thể hiện đối tượng ở trạng thái cân bằng, bao gồm mô hình cân bằng thị trường, mô hình cân đối. Phương pháp sử dụng để phân tích mô hình là giải phương trình, hệ phương trình và tìm điểm bất động.

c) Mô hình tất định, mô hình ngẫu nhiên

Mô hình tất định: Các biến số trong mô hình là tất định (phi ngẫu nhiên)

Mô hình ngẫu nhiên: Các biến trong mô hình là biến ngẫu nhiên.

d) Mô hình toán kinh tế và mô hình kinh tế lượng

Các mô hình kinh tế lượng cũng là mô hình toán kinh tế và thuộc lớp mô hình ngẫu nhiên. Trong thực tế, về mặt ứng dụng ta có thể phân biệt như sau:

- Đối với mô hình toán kinh tế các tham số của mô hình hoặc cho trước hoặc giả định. Khi phân tích ta có thể sử dụng phương pháp toán học thuần túy.
- Đối với mô hình kinh tế lượng các tham số chính là các ẩn số, giá trị của chúng được xác định nhờ các phương pháp thống kê căn cứ vào giá trị quá khứ của các biến trong mô hình.

e) Mô hình tĩnh, mô hình động

Mô hình tĩnh: Nghiên cứu các hiện tượng kinh tế, xã hội tại thời điểm hoặc thời gian đã xác định (thời gian cố định).

Mô hình động: Mô hình có các biến số phụ thuộc vào thời gian.

3.2. Phân loại mô hình theo quy mô, phạm vi và thời hạn

a) Mô hình vĩ mô

Mô hình mô tả các hiện tượng kinh tế liên quan đến một nền kinh tế, một khu vực kinh tế rộng lớn của một số quốc gia.

b) Mô hình vi mô

Mô hình mô tả một thực thể kinh tế nhỏ, hoặc những hiện tượng kinh tế với các yếu tố ảnh hưởng trong phạm vi nhỏ, hẹp và mức độ chi tiết.

4. PHÂN TÍCH MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ.

4.1. Đo lường sự thay đổi của biến nội sinh theo biến ngoại sinh

4.1.1. Đo lường sự thay đổi tuyệt đối

Xét mối quan hệ kinh tế trường hợp đơn giản biến nội sinh Y chỉ phụ thuộc vào một biến ngoại sinh X, $Y = f(X)$

Gọi ΔY là sự thay đổi của Y khi X thay đổi một lượng ΔX

$$\rho = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X}$$

ρ: là lượng thay đổi trung bình của Y theo X

Ý nghĩa: Nếu X thay đổi 1 đơn vị thì Y thay đổi ρ đơn vị.

Nếu f khả vi (có đạo hàm) theo X , ta gọi là xu hướng của biến nội sinh Y theo ngoại sinh X, là biên tế của Y theo X, ký hiệu: $Mf(X)$

$$\rho = f^{/}(X) = \frac{df(X)}{d(X)} = Mf(X)$$

Xét mối quan hệ kinh tế trường hợp biến nội sinh Y phụ thuộc vào nhiều biến ngoại sinh $X_1, X_2, ..., X_n$ bởi hàm số sau

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Cho X_i thay đổi một lượng nhỏ ΔX_i còn các biến khác không đổi, khi đó Y thay đổi một lượng tương ứng là:

$$\Delta f = f(X_1, X_2, ..., X_i + \Delta X_i, ..., X_n) - f(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)$$

Lượng thay đổi trung bình của Y theo X_i là:

$$\rho_{X_i} = \frac{\Delta f}{\Delta X_i}$$

Nếu f khả vi theo biến X_i ta gọi xu hướng thay đổi của biến nội sinh Y theo biến ngoại sinh X_i tại X, là biên tế của Y theo X_i, kí hiệu $Mf(X_i)$

$$\rho_{X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} = Mf(X_i)$$

Nếu tất cả các biến ngoại sinh X_i đều thay đổi một lượng nhỏ ΔX_i thì độ thay đổi của Y là:

$$\Delta Y \approx dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$$

Nếu X_i là biến nội sinh phụ thuộc vào một biến khác, thì ta sử dụng công thức tính vi phân của hàm hợp.

Ví dụ 4: Chi phí TC(Q) phụ thuộc vào sản lượng Q và có mô hình tổng chi phí sản xuất của doanh nghiệp là:

$$TC(Q) = Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144; \ (Q > 0)$$

Chi phí biên của TC theo Q (chi phí cận biên), kí hiệu

$$MC(Q) = 3Q^2 - 10Q + 14$$

Xét tại mức $Q_0 = 100$ thì $MC(100) = 29014$

Ý nghĩa

Đang sản xuất với tổng sản lượng $Q_0 = 100$ nếu tăng sản lượng lên một đơn vị thành $Q_1 = 101$ thì tổng chi phí tăng thêm 29014 đơn vị. Nhưng trong thực tế chi phí tăng thêm là

$$TC(Q_1) - TC(Q_0) = 29310 = \int_{Q_0}^{Q_1} MC(Q)dQ$$

b) Đo lường sự thay đổi tương đối (hệ số co dãn)

Trường hợp đơn giản: Xét mối quan hệ kinh tế $Y = f(X)$

Ta có

$\frac{\Delta X}{X}$: % sự thay đổi của X; $\frac{\Delta Y}{Y}$: % sự thay đổi của Y

Hệ số co dãn của Y theo X

$$\varepsilon_{Y|X} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Nếu $Y = f(X)$ khả vi, ta có

$$\varepsilon_{Y|X} = f'(X) \cdot \frac{X}{Y} = \frac{df}{dX} \cdot \frac{X}{Y}$$

Hay $\varepsilon_{Y|X} = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{Mf(X)}{Af(X)}$

Ý nghĩa: Khi X thay đổi 1% thì Y thay đổi $\varepsilon_{Y|X}$ %.

Ví dụ 5: Xét mô hình sản xuất theo một loại sản phẩm. Khi đó hàm cầu $Q_D = Q(P)$ là hàm giảm theo đơn giá P. Hệ số co dãn $\varepsilon_{Q_D|P}$ thường được viết tắt là ε_D. Ta có

$$\varepsilon_{Q_D|P} = Q'(P) \cdot \frac{P}{Q} < 0.$$

Hệ số co dãn $\varepsilon_{Q_D|P}$ cho biết lượng cầu sẽ giảm bao nhiêu phần trăm khi ta tăng giá 1%.

Chẳng hạn, với hàm cầu $Q_D = 1000 - 5P$, hệ số co dãn $\varepsilon_{Q_D|P}$ là :

$$\varepsilon_{Q_D|P} = Q'(P) \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{5P}{1000 - 5P}$$

Tại $P = 120$, $\varepsilon_{Q_D|P}(P_0) = -1,5(\%)$, nghĩa là khi đang bán với đơn giá $P_0 = 120$, nếu ta tăng giá lên 1%, thì lượng cầu sẽ giảm đi khoảng 1,5%.

Trường hợp tổng quát: Xét mối quan hệ kinh tế $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$

Ta có

$\frac{\Delta X_i}{X_i}$: % sự thay đổi của X_i; $\frac{\Delta Y}{Y}$: % sự thay đổi của Y

Hệ số co dãn riêng của Y theo biến X_i

$$\varepsilon_{Y|X_i} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X_i / X_i} = \frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \cdot \frac{X_i}{Y}$$

Nếu $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ khả vi theo biến X_i, ta có

$$\varepsilon_{Y|X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} = \frac{Mf(X_i)}{Af(X_i)}$$

Ý nghĩa: Trong điều kiện các yếu tố khác không đổi, nếu X_i thay đổi 1% thì Y thay đổi $\varepsilon_{Y|X_i}$ %.

Khi tất cả các biến ngoại sinh cùng thay đổi 1%, ta có hệ số co dãn toàn phần như sau

$$\varepsilon_{Y|X} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{Y|X_i}$$

Ví dụ 6: Xét mối quan hệ giữa biến nội sinh và biến ngoại sinh được biểu diễn qua hàm Cobb Douglas như sau:

$$Q = f(L, K) = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

Hệ số co dãn riêng của Q theo L

$$\varepsilon_{Q|L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \beta_1 \beta_2 L^{\beta_2 - 1} K^{\beta_3} \cdot \frac{L}{\beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}} = \beta_2$$

Hệ số co dãn riêng của Q theo K

$$\varepsilon_{Q|K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \beta_1 \beta_3 L^{\beta_2} K^{\beta_3 - 1} \cdot \frac{K}{\beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}} = \beta_3$$

Hệ số co dãn của Q theo L và K

$$\varepsilon_{Q|L,K} = \beta_2 + \beta_3$$

4.2. Hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng).

Khi trong mô hình có biến ngoại sinh là biến thời gian t, giả sử $Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_n, t\right)$, khi đó ta dùng hệ số tăng trưởng để đo sự thay đổi của biến nội sinh theo biến thời gian t.

Hệ số tăng trưởng của Y là

$$r_Y = \frac{\Delta Y / \Delta t}{Y}$$, thường r_Y được theo tính theo tỷ lệ %.

Nếu hàm $Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_n, t\right)$ khả vi theo t, ta có

$$r_Y = \frac{\partial Y / \partial t}{Y} = \frac{\partial \ln Y}{\partial t}$$

Trường hợp biến nội sinh phụ thuộc vào thời gian một cách gián tiếp thông qua biến ngoại sinh, $Y = f\left(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\right)$ thì nhịp tăng trưởng của biến nội sinh được tính như sau:

$$r_Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial t} \right)}{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} \cdot \frac{1}{X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_{Y|X_i} \cdot r_{X_i} \right)$$

Trong đó: $\varepsilon_{Y|X_i}$ là hệ số co dãn của Y theo X_i; r_{X_i} là nhịp tăng trưởng của các biến ngoại sinh.

Ví dụ 7: Theo công thức tính lãi gộp liên tục tại mọi thời điểm ta có: $V_t = V_0 e^{rt}$ có hệ số tăng trưởng

$$r_V = \frac{\partial V / \partial t}{V} = \frac{rV_0 e^{rt}}{V_0 e^{rt}} = r$$

Nếu lãi suất tính theo từng kỳ thì $V_t = V_0(1 + r)^t$ có hệ số tăng trưởng

$$r_V = \frac{\partial \ln V_t}{\partial t} = \ln(1 + r) \approx r$$

Hệ số tăng trưởng trong một vài trường hợp

Cho: $u = g(t);\ v = h(t)$

Nếu $y = uv \Rightarrow r_y = r_u + r_v$

Nếu $y = u / v \Rightarrow r_y = r_u - r_v$

Nếu $y = u + v \Rightarrow r_y = \frac{u}{u+v} r_u + \frac{v}{u+v} r_v$

Nếu $y = u - v \Rightarrow r_y = \frac{u}{u+v} r_u - \frac{v}{u+v} r_v$

4.3. Hệ số thay thế (bổ sung, chuyển đổi)

Cho $Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, nếu cho 2 biến ngoại sinh X_i, X_j thay đổi và các yếu tố khác không đổi, để biến nội sinh Y không đổi thì hai biến ngoại sinh trên thay đổi theo tỷ lệ nào? Từ biểu thức vi phân của hàm Y

$$dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial X_i} dX_i$$

Giả sử hai biến X_i, X_j thay đổi nên để Y không đổi thì:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}.dX_i + \frac{\partial f}{\partial X_j}.dX_j = 0$$

Suy ra $\dfrac{dX_i}{dX_j} = -\dfrac{\partial f / \partial X_j}{\partial f / \partial X_i}$

Hệ số này cho biết khi X_j thay đổi một đơn vị, thì cần phải thay đổi X_i một lượng bằng bao nhiêu đơn vị để Y không thay đổi.

Nếu $\dfrac{dX_i}{dX_j} < 0$ thì ta nói X_i có thể thay thế (chuyển đổi) được cho X_j tại $X = X_0$ và với tỷ lệ $\left|\dfrac{dX_i}{dX_j}\right|$, tỷ lệ này cho biết khi giảm (tăng) mức X_j một đơn vị, thì phải tăng (giảm) mức X_i bao nhiêu đơn vị để Y không thay đổi, và gọi hệ số thay thế cận biên của X_i cho X_j.

Nếu $\dfrac{dX_i}{dX_j} > 0$ thì ta nói X_i, X_j có thể bổ sung được cho nhau tại $X = X_0$ và với tỷ lệ $\dfrac{dX_i}{dX_j}$, tỷ lệ này cho biết khi tăng (giảm) mức X_j một đơn vị, thì phải tăng (giảm) mức X_i bao nhiêu đơn vị để Y không thay đổi, và gọi hệ số thay thế cận biên của X_i cho X_j.

Nếu $\dfrac{dX_i}{dX_j} = 0$ thì ta nói X_i, X_j không thay thế được cho nhau hoặc không bổ sung được cho nhau.

Ví dụ 8: Hàm sản xuất của một nước giai đoạn 1986 – 1995 có dạng

$$Q = 75114K^{0,175}L^{0,904}e^{0,0124t}$$

với Q : sản lượng, K : vốn, L : lao động, t : thời gian

Hệ số co dãn của sản lượng theo vốn: 0,175

Hệ số co dãn của sản lượng theo lao động: 0,904

Hệ số co dãn toàn phần: 0,175+0,904=1,079

Tốc độ tăng trưởng trung bình của mức sản lượng trên trong giai đoạn 1986 – 1995 là

$$r_Q = \frac{\partial Q / \partial t}{Q} = \frac{0,0124 \cdot 75114K^{0,175}L^{0,904}e^{0,0124t}}{75114K^{0,175}L^{0,904}e^{0,0124t}} = 0,0124$$

Hệ số thay thế giữa K và L

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K} = -\frac{0,904 \cdot 75114K^{0,175}L^{-0,096}e^{0,0124t}}{0,175 \cdot 75114K^{-0,825}L^{0,904}e^{0,0124t}} \approx -5,166 \cdot \frac{K}{L}$$

Xét $L = 226; K = 175$ thì ta có $\frac{dK}{dL} = -4$, cho biết khi ta tăng lao động 1 đơn vị thì giảm vốn xuống 4 đơn vị.

5. ÁP DỤNG PHÂN TÍCH MỘT SỐ MÔ HÌNH.

5.1. Mô hình tối ưu.

5.1.1. Mô hình hàm sản xuất tối ưu về công nghệ

Mô hình hóa

$$\xrightarrow{X_1, \dots, X_n} \boxed{F} \xrightarrow{Q}$$

Giả sử với công nghệ hiện có, doanh nghiệp có thể sử dụng n yếu tố đầu vào ở mức $X_1, X_2, ..., X_n$, và thu được Q đơn vị sản phẩm đầu ra.

Ta có quan hệ hàm số $Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, và gọi là hàm sản xuất của doanh nghiệp.

Ví dụ 9: Với số liệu Việt Nam năm 1986-1995, người ta ước lượng được hàm sản xuất:

$$Q = 75114K^{0,175}L^{0,904}e^{0,0124t}$$

Trong đó: Q là giá trị sản xuất, K là vốn, L là lao động, t là biến thời gian.

Ví dụ 10: Với số liệu nước Áo năm 1951-1955 trong nông nghiệp người ta ước lượng được hàm sản xuất là:

$$Q = 2,439X^{0,0635}K^{0,6172}L^{0,3193}$$

Trong đó: Q là giá trị sản xuất, K là vốn, L là lao động, X là nguồn tài nguyên được khai thác

Ví dụ 11: Hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas là:

$$Q = \beta_1 K^{\beta_2} L^{\beta_3}$$

Trong đó $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ là các tham số, Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động.

Phân tích tác động của các yếu tố sản xuất tới sản lượng Q, trong mô hình

$$Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$$

a) Xét quá trình sản xuất ngắn hạn.

Trong tình huống doanh nghiệp chỉ có thể thay đổi một yếu tố i, còn các yếu tố khác không thay đổi, thì việc sử dụng yếu tố thứ i ở mức có lợi nhất nếu năng suất trung bình đạt cực đại, ta có mô hình:

$$\frac{f(X)}{X_i} \to \max$$

Điều kiện cần để có cực đại, khi X là nghiệm của phương trình:

$$\frac{f(X)}{X_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} \qquad (1)$$

Trong nhiều trường hợp điều kiện này cũng là điều kiện đủ.

b) Xét quá trình sản xuất dài hạn.

Giả sử doanh nghiệp có khả năng thay đổi tất cả các yếu tố đầu vào, theo cùng một tỷ lệ.

Nếu $f(\lambda X) > \lambda f(X)$ với $\lambda > 1$, thì ta nói quy mô công nghệ sản xuất tăng có hiệu quả.

Nếu $f(\lambda X) < \lambda f(X)$ với $\lambda > 1$, thì ta nói quy mô công nghệ sản xuất tăng không hiệu quả.

Nếu $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ với $\lambda > 1$, thì ta nói quy mô công nghệ sản xuất tăng không thay đổi hiệu quả.

Để đo tính hiệu quả theo quy mô, ta dùng hệ số co dãn toàn phần của Q theo các yếu tố.

Ví dụ 12: Xét hàm sản xuất Cobb-Douglas $Q = f(K, L) = \beta_1 K^{\beta_2} L^{\beta_3}$

Khi tăng quy mô sản xuất lên $\lambda > 1$ lần ta có:

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \beta_1 \lambda^{\beta_2+\beta_3} K^{\beta_2} L^{\beta_3} = \lambda^{\beta_2+\beta_3} Q,$$

do vậy kết quả sản xuất tăng $\lambda^{\beta_2+\beta_3}$ lần.

Như vậy đối với hàm này, hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất tùy thuộc vào $\beta_2 + \beta_3$.

Ta cũng có thể đo tính hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất, của mô hình này qua hệ số co dãn toàn phần $\varepsilon_Q = \varepsilon_{Q/L} + \varepsilon_{Q/K} = \beta_2 + \beta_3$ do vậy khi tăng K, L thêm cùng một tỷ lệ 1% thì Q sẽ tăng (giảm) $(\beta_2 + \beta_3)\%$.

5.1.2. Mô hình hàm sản xuất tối ưu về kinh tế

Giả sử $Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ là hàm sản xuất của doanh nghiệp, và giá các yếu tố đầu vào là $w_1, w_2, ..., w_n$.

a) Tình huống cực tiểu chi phí

Gọi Q là mức sản lượng doanh nghiệp dự kiến sản xuất, như vậy có ràng buộc $f(X) = Q$. Đồng thời doanh nghiệp phải chi phí một khoản:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

Ta có mô hình

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i \to \min$$

với điều kiện: $f(X) = Q$

Phân tích mô hình

Lập hàm phụ Lagrange: $L = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i + \lambda\left[Q - f\left(X\right)\right]$

Điều kiện cần để X là điểm cực trị

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{w_i}{w_j} = \dfrac{\partial f / \partial X_i}{\partial f / \partial X_j} \quad \forall i, j & (2) \\ Q = f(X) & (3) \end{cases}$$

vế trái của (2) là tỷ giá của hai yếu tố i, j; vế phải là hệ số thay thế giữa hai yếu tố này.

Vậy điều kiện cần của việc sử dụng tối ưu các yếu tố vốn ở mức: "tỷ lệ thay thế bằng tỷ lệ giá của chúng".

Gọi TC là tổng chi phí tối ưu để sản xuất được lượng sản phẩm Q, vậy $TC = TC(Q, w_1, w_2, ..., w_n)$ là hàm tổng chi phí của doanh nghiệp.

Với mô hình, người ta tính được:

$$MC(Q) = \lambda^*; \quad MC(w_i) = X_i^* \qquad (4)$$

Trong đó: λ^* là giá trị nhân tử Lagrange trong trường hợp tối ưu; X_i^* là nghiệm tối ưu trong mô hình.

Ví dụ 13: Giả sử hàm sản xuất doanh nghiệp có dạng:

$Q = 25K^{0,5}L^{0,5}$; biết giá vốn $w_K = 12$, $w_L = 3$

a) Định mức sử dụng K, L tối ưu để sản xuất được mức sản lượng $Q^* = 1250$.

b) Tính hệ số co dãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q*.

c) Nếu giá vốn và giá lao động tăng đều 10%, mức sản lượng như trước, thì mức sử dụng vốn và lao động tối ưu sẽ thay đổi như thế nào?

d) Phân tích tác động của giá vốn, lao động tới tổng chi phí.

Giải

Theo mô hình, ta có bài toán:

$TC = 12K + 3L \to \min$ với điều kiện $25K^{0,5}L^{0,5} = 1250$

a) Phương án tối ưu là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{3} = \dfrac{25/2.K^{-0,5}.\,L^{0,5}}{25/2.K^{0,5}.L^{-0,5}} \\ 25.K^{0,5}.L^{0,5} = 1250 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K = 25 \\ L = 100 \end{cases}$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì phải sử dụng K = 25; L = 100.

b) Hệ số co dãn của TC theo Q tại Q*=1250 là:

Ta có $TC\left(Q^*\right) = 600$

Vậy $\varepsilon_{Q^*}^{TC} = TC^{/}(Q^*) \cdot \dfrac{Q^*}{TC(Q^*)} = MC\left(Q^*\right) \cdot \dfrac{Q^*}{TC(Q^*)} = \dfrac{12}{25} \cdot \dfrac{1250}{600} = 1$

c) Vì giá của K, L tăng cùng tỷ lệ, mức sản lượng không đổi, do đó hệ (2), (3) không đổi, nên K^*, L^* không đổi

d) Vì $MC_{w_K} = K^* = 25 > 0$; $MC_{w_L} = L^* = 100 > 0$ nên khi giá vốn và lao động tăng, thì tổng chi phí cũng tăng theo.

b) Tình huống cực đại sản lượng:

Gọi C là kinh phí dự kiến đầu tư mua các yếu tố đầu vào, với mức X_i là các yếu tố đầu vào để sản xuất được Q sản lượng.

Ta có mô hình:

$$Q = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) \to \max$$

với điều kiện: $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i = C$

5.1.3. Mô hình tối đa hóa lợi nhuận của doanh nghiệp

Gọi

$TR(Q)$: là hàm tổng doanh thu của doanh nghiệp.

$TC(Q)$: là hàm tổng chi phí.

Hàm lợi nhuận: $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

Mô hình tối đa lợi nhuận:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \to \max$$

Điều kiện cần là : $MR(Q) = MC(Q)$

Khi sản phẩm của doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo thì Q là biến ngoại sinh, nên ta có : $TR = PQ$

Suy ra $MR(Q) = MC(Q) = P; MR(P) = Q$ (5)

Hàm $P = MC(Q)$ thể hiện mức cung của doanh nghiệp và giá bán trên thị trường.

Khi sản phẩm độc quyền, doanh nghiệp toàn quyền quy định giá bán, do đó mức cung tối đa hóa lợi nhuận và mức cầu thị trường, bằng mức cung của doanh nghiệp. Suy ra giá bán sản phẩm phụ thuộc vào mức cung của doanh nghiệp.

$$P = P(Q) \Leftrightarrow Q = Q(P)$$

Khi đó $Q = Q(P)$ gọi là hàm cầu xuôi

$P = P(Q)$ gọi là hàm cầu ngược

với doanh nghiệp độc quyền, hàm cầu thường được viết dưới dạng hàm cầu ngược.

Ví dụ 14: Một doanh nghiệp có hàm doanh thu

$$TR(Q) = 58Q - \frac{1}{2}Q^2$$

Hàm tổng chi phí : $TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 97Q + FC$

Trong đó Q là sản lượng, FC là chi phí cố định.

a) Với $FC = 4$ hãy xác định mức sản lượng tối đa lợi nhuận.

b) Phân tích tác động của chi phí cố định tới mức sản lượng tối đa lợi nhuận và mức lợi nhuận tối đa.

Giải

a) Điều kiện cần để có π_{max} là: $MR(Q) = MC(Q)$

$$\Leftrightarrow 58 - Q = Q^2 - 17Q + 97 \ (*)$$
$$\Leftrightarrow Q = 3 \vee Q = 13$$

Kiểm tra điều kiện đủ của tối ưu ta có $Q^* = 13$

b) Chi phí cố định (FC) không có mặt trong (*) nên Q^* không phụ thuộc vào FC.

Ta có: $\pi^* = TR\left(Q^*\right) - \frac{1}{3}\left(Q^*\right)^3 + 8,5\left(Q^*\right)^2 - 98Q^* - FC$

nên $\frac{d\pi}{dFC} = -1 < 0$ suy ra FC tác động ngược với mức lợi nhuận tối đa.

Ví dụ 15: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo, có hàm chi phí cận biên $MC(Q) = 2Q^2 - 12Q + 25$, chi phí cố định FC, giá bán mỗi sản phẩm là P.

a) Xác định hàm tổng chi phí TC với mức $FC = 20$. Khi $P = 39$ hãy xác định mức sản lượng Q* để có lợi nhuận tối ưu.

b) Nếu giá P tăng 1% thì mức sản lượng, lợi nhuận tối ưu sẽ biến động như thế nào?

Giải

a) Ta có: $TC(Q) = \int MC(Q)dQ + C = \frac{2}{3}Q^3 - 6Q^2 + 25Q + C$

Ta có $FC = TC(0) \Leftrightarrow C = FC = 20$

Vậy $TC(Q) = \frac{2}{3}Q^3 - 6Q^2 + 25Q + 20$

Để lợi nhuận tối ưu khi $P = MC(Q)$

$$\Leftrightarrow 39 = 2Q^2 - 12Q + 25 \Leftrightarrow Q^* = 7 \Rightarrow \pi^* = 143,3$$

b) Từ $P = 2Q^2 - 12Q + 25$. Ta có $dP = \left(4Q - 12\right)dQ \Leftrightarrow \frac{dQ}{dp} = \frac{1}{4Q - 12}$

Tại mức tối ưu, ta có $P = 39, Q = 7, \pi = 143,3$

Suy ra $\varepsilon_{Q/P} = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{P}{Q} = 0,348$; $\varepsilon_{\pi/P} = \frac{\partial\pi}{\partial P} \cdot \frac{P}{\pi} = 7 \cdot \frac{39}{143,3} = 1,905$.

Như vậy nếu giá P tăng lên 1% thì sản lượng Q tăng 0,348% và mức lợi nhuận tăng 1,905%.

5.1.4. Mô hình thỏa dụng

Giả sử một hộ gia đình mua và tiêu thụ n loại hàng hóa với khối lượng là $X_1, X_2, ..., X_n$, ta gọi vectơ $X = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ là một giỏ hàng, nhằm thỏa mãn về tâm lý, sinh lý thể chất và tinh thần...

Sự thỏa mãn này được thể hiện qua hàm thỏa dụng $TU = f(X, \alpha, \beta)$ trong đó α, β là các tham số.

Nếu một hộ gia đình có một số tiền là M, được dùng để mua giỏ hàng nói trên. Ta gọi P_i là giá một đơn vị hàng loại i, với mọi $i = \overline{1, n}$.

Mô hình thỏa dụng như sau:

$$Z = TU(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Với ràng buộc : $\sum_{i=1}^{n} P_i X_i = M$

Ta có điều kiện cần của nghiệm tối ưu là:

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\partial TU / \partial X_i}{\partial TU / \partial X_j}, \ i \neq j$$

Nếu cố định sở thích, thì nghiệm tối ưu X^* thỏa phương trình:

$X_i^* = X_i^*\left(P_1, P_2, ..., P_n, M\right)$ với mọi $i = \overline{1, n}$ là hàm cầu của loại hàng thứ i, và gọi là hàm cầu Marshall.

Ví dụ 16: Hàm thỏa dụng của hộ gia đình khi tiêu thụ loại hàng hóa A, B có dạng:

$TU = 40X_A^{0.25}X_B^{0.5}$ với giá hàng $P_A = 4, \ P_B = 10$

a) Loại hàng A thay thế được cho loại hàng B hay không? nếu thay thế được thì thay theo tỷ lệ nào?

b) Xác định mức cầu loại hàng A, B của hộ gia đình với $M = 600$.

Giải

a) $\frac{dX_A}{dX_B} = -\frac{20X_A^{0.25}X_B^{-0.5}}{10X_A^{-0.75}X_B^{0.5}} = -\frac{2X_A}{X_B} < 0$ do đó hai loại hàng hóa này luôn thay thế được cho nhau, và thay thế theo tỷ lệ 1B thì cần $\frac{2X_A}{X_B}$ đơn vị hàng loại A.

b) $\frac{2X_A}{X_B} = \frac{P_B}{P_A} = \frac{10}{4}$ và $4X_A + 10X_B = 600$

Suy ra $X_A^* = 50; X_B^* = 40 \Rightarrow$ Mức cầu $D_A = 50; D_B = 40$.

5.2. Mô hình cân bằng thị trường.

5.2.1. Mô hình cân bằng thị trường riêng.

Thị trường gồm các tác nhân tham gia vào lực lượng cung, cầu liên hệ với nhau bởi giá trong quá trình trao đổi.

Giả sử hàm cung $Q_S = S(a, b, P)$ và hàm cầu $Q_D = D(c, d, P)$

Trong đó P là giá và a, b, c, d là các tham số hay là các biến ngoại sinh

Ta có mô hình cân bằng thị trường riêng:

$$Q_S = Q_D \Leftrightarrow S(a, b, P) = D(c, d, P)$$

Ví dụ 17: Giả sử hàm cung, hàm cầu có dạng:

$$Q_S = -a + bP, \ \ a, b > 0$$

$$Q_D = c - dP, \ \ c, d > 0$$

Ý nghĩa của các hệ số a, b, c, d:

Cho $Q_S = 0$ (không có cung) suy ra $P = \frac{a}{b}$, vậy $\frac{a}{b}$ là mức giá tối thiểu mà người sản xuất có thể chấp nhận.

Cho $Q_D = 0$ (không có cầu) suy ra $P = \frac{c}{d}$, vậy $\frac{c}{d}$ là mức giá tối đa người tiêu dùng chấp nhận.

Giá cân bằng: $\overline{P} = \frac{c+a}{d+b}$, lượng hàng cân bằng: $\overline{Q} = \frac{bc-ad}{d+b}$.

5.2.2. Mô hình cân bằng vĩ mô.

Tổng cung: Xét thị trường hàng hóa dịch vụ, nên tổng cung của nền kinh tế được coi là biến ngoại sinh và ký hiệu là Y, được đo bằng tổng sản phẩm quốc nội (GDP) hoặc tổng thu nhập quốc dân (GNP).

Tổng cầu bao gồm:

C : Nhu cầu tiêu dùng của dân cư

I : Nhu cầu đầu tư của dân cư

G : Nhu cầu tiêu dùng của chính phủ

EX : Nhu cầu cho xuất khẩu

IM : Nhu cầu nhập khẩu

T : là Thuế

Phương trình hành vi mô tả mối quan hệ giữa các biến:

- Tiêu dùng trong dân cư $C = C_0 + a(Y - T)$; $Y_d = Y - T$ là thu nhập khả dụng, $0 < a < 1$ là khuynh hướng tiêu dùng biên, C_0 phần chi tiêu dự định không phụ thuộc vào thu nhập.
- Đầu tư của dân cư: $I = I_0 - br$ với $b > 0$; r là lãi suất
- Tổng cầu trong nước: $C + I + G + EX - IM$
- Thuế T được giả thiết gồm khoản thuế thu nhập $(d \cdot Y)$ và các loại thuế khác (c): $T = c + d \cdot Y$

Mô hình cân bằng vĩ mô

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

$$C = C_0 + a(Y - T) \text{ với } C_0 > 0;\ 0 < a < 1$$

$$I = I_0 - br,\ b > 0$$

$$T = c + d \cdot Y \text{ với } c > 0;\ 0 < d < 1$$

Trong đó Y, C, I, T là các biến nội sinh, các biến còn lại là ngoại sinh.

Giải hệ phương trình trên với các ẩn là các biến nội sinh ta được:

$$\overline{Y} = \frac{C_0 - ac + I_0 - br + G + EX - IM}{1 - a + ad}$$

Phân tích mô hình: để nghiên cứu tác động của chính sách tài khóa, đối với mức sản xuất Y ta cần tính:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1 - a + ad} > 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial c} = \frac{-a}{1 - a + ad} < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial d} = \frac{-a\overline{Y}}{1 - a + ad} < 0 \quad (3)$$

Từ (1) suy ra : Nếu chính phủ tăng tiêu dùng, thì tổng cầu tăng, tức là có kích cầu, và mức tăng của tổng cầu sẽ lớn hơn mức tăng của chi tiêu. Ta gọi $\partial \overline{Y} / \partial G$ là nhân tử gia tăng chi tiêu của chính phủ.

Từ (2), (3) suy ra : Nếu chính phủ tăng thuế thì tổng cầu sẽ giảm.

Tùy thuộc vào tình huống cụ thể, mô hình cân bằng vĩ mô có thể đơn giản bớt, chẳng hạn biến đầu tư I và thuế T có thể coi là biến ngoại sinh, nhưng xuất nhập khẩu có thể coi là biến nội sinh.

Ta xét thí dụ sau:

Ví dụ 18: Các chỉ tiêu vĩ mô của nền kinh tế liên hệ bởi mô hình:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

$$Y_d = (1 - t)Y, \quad 0 < t < 1$$

$$C = aY_d, \quad 0 < a < 1$$

$$IM = \alpha Y_d, \quad 0 < \alpha < 1$$

Trong đó Y là thu nhập quốc dân, Y_d là thu nhập khả dụng, C là tiêu dùng trong dân cư, I là đầu tư, G là tiêu dùng chính phủ, EX là xuất khẩu, IM nhập khẩu, t là thuế suất thu nhập.

Giải mô hình trên ta có:

$$\overline{Y} = \frac{I + G + EX}{1 - a(1 - t) + \alpha(1 - t)} \quad (*)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1 - a(1-t) + \alpha(1-t)} \quad (**)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial EX} = \frac{1}{1 - a(1-t) + \alpha(1-t)} \quad (***)$$

a) G = 400 tỷ, EX = I = 250 tỷ, $a = 0,8$; $\alpha = 0,2$; t = 0,1. Hãy xác định thu nhập quốc dân và tình trạng ngân sách nhà nước.

b) Với các số liệu ở câu a) có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng tới thu nhập quốc dân. Hãy nhận xét ý kiến này?

Giải

a) Ta có: $C = a(1-t)Y$; $IM = \alpha(1-t)Y$ thay vào phương trình cân bằng ta có:

$$Y = a(1-t)Y + I + G + EX - \alpha(1-t)Y$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{I + G + EX}{1 - a(1-t) + \alpha(1-t)} = 1956,5$$

Vậy thu nhập quốc dân sẽ là 1956,5 tỷ.

Nguồn thu của ngân sách nhà nước: $T = Y - Y_d = tY = 0,1 \cdot 1956,5 = 195,65$. và chi tiêu của chính phủ là 400 tỷ lớn hơn $T = 195,65$ nên ngân sách chính phủ bội chi hay thâm hụt ngân sách.

b) Hệ số co dãn của thu nhập theo chi tiêu của chính phủ:

$$\varepsilon_{Y|G} = \frac{\partial Y}{\partial G} \cdot \frac{G}{Y} = \frac{1}{1 - a(1-t) + \alpha(1-t)} \cdot \frac{G}{Y} = 0,094$$

Hệ số co dãn của thu nhập theo xuất khẩu:

$$\varepsilon_{Y|EX} = \frac{\partial Y}{\partial EX} \cdot \frac{EX}{Y} = \frac{1}{1 - a(1-t) + \alpha(1-t)} \cdot \frac{EX}{Y} = 0,059$$

Vậy $\varepsilon_{Y|G} > \varepsilon_{Y|EX}$.

Khi giảm xuất khẩu 10% thì thu nhập quốc dân sẽ giảm $10\varepsilon_{Y|EX}(\%) = 0,59(\%)$ và khi tăng chi tiêu chính phủ lên 10% thì thu nhập quốc dân tăng $10\varepsilon_{Y|G}(\%) = 0,94(\%)$. Rõ ràng $10\varepsilon_{Y|G}(\%) > 10\varepsilon_{Y|EX}(\%)$ nên ý kiến trên là sai, vậy thu nhập quốc dân sẽ tăng lên.

5.3. Mô hình kinh tế động.

Trong các mô hình đã nghiên cứu, chúng ta mới chỉ xét các hoạt động kinh tế diễn ra tại cùng một thời điểm, yếu tố thời gian không có vai trò gì, nên các mô hình này gọi là mô hình tĩnh.

Trong thực tế hoạt động kinh tế diễn biến theo thời gian, do đó có mối liên hệ giữa: quá khứ - hiện tại - tương lai, như vậy yếu tố thời gian sẽ xuất hiện trong các mô hình.

Các mô hình toán kinh tế có chứa biến thời gian, gọi là mô hình kinh tế động.

5.3.1. Mô hình cân bằng giá dạng tuyến tính.

Giả sử trên thị trường giá một loại hàng tác động đến cung - cầu như sau:

Mô hình a:

$$Q_D = a - bP;\ a, b > 0$$

$$Q_S = -c + dP;\ c, d > 0$$

$$Q_S = Q_D$$

Mô hình b: (Mô hình Cobweb)

$$Q_{D,t+1} = a - bP_{t+1};\ a, b > 0$$

$$Q_{S,t+1} = -c + dP_{t+1};\ c, d > 0$$

$$Q_{S,t+1} = Q_{D,t+1}$$

Phân tích mô hình

Mô hình a : Giá cân bằng là : $\overline{P} = \dfrac{a+c}{b+d}$

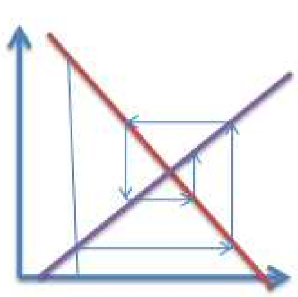
- Nếu tại $t = 0$, ta có $P_0 = \overline{P}$ thì giá cân bằng ở mọi thời điểm.
- Nếu tại $t > 0$, suy ra $\left|Q_D - Q_S\right| > 0$, và giả sử chênh lệch cung - cầu tại t quyết định sự thay đổi giá P, và quan hệ này có dạng:

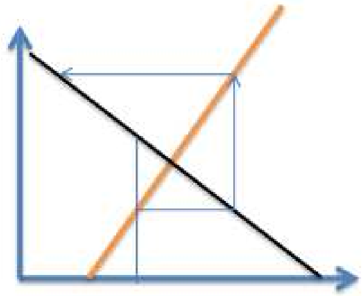
$$\frac{dP}{dt} = k\left(Q_D - Q_S\right) \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + k(b+d)P = k(a+c)$$

Phương trình vi phân này, có nghiệm với điều kiện ban đầu P_0 là:

$$P_t = (P_0 - \overline{P})e^{-k(b+d)t} + \overline{P}$$

Cho $t \to +\infty$ ta thấy P_t dần tới $\overline{P}$





Hình a : có cân bằng giá   Hình b : không có cân bằng giá

Mô hình b : $P_{t+1} = \frac{d}{b}P_t + \frac{a+c}{b}$ đây là phương trình sai phân, phương trình này có nghiệm : $P_t = \left(P_0 - \frac{a+c}{b+c}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$.

Cho $t \to +\infty$; Nếu $d < b$ thì P_t tiến dần đến giá cân bằng. Nếu $d > b$ thì $P_t \to +\infty$ (không có giá cân bằng).

5.3.2. Mô hình tăng trưởng Domar.

Giả thiết : Năng lực sản xuất tại thời điểm t chỉ phụ thuộc tuyến tính vào lượng vốn, không tính tới lao động cũng như công nghệ, ký hiệu $Q(t)$ là năng lực sản xuất, $K(t)$ là năng lực vốn, và $Q(t) = aK(t)$ với tham số $a > 0$ tại thời điểm t.

Gọi $Y(t)$: là tổng cầu,

$I(t)$: là đầu tư của kỳ t, khi đó ta có:

$$\frac{dK}{dt} = I(t); \quad Y(t) = \frac{1}{s}I(t)$$

Với tham số $0 < s < 1$ gọi là khuynh hướng tiết kiệm biên.

Điều kiện cân bằng: $Q(t) = Y(t)$ "Năng lực sản xuất của nền kinh tế = Tổng cầu".

Mô hình tăng trưởng Domar:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = I(t) \\ Y(t) = \dfrac{1}{s} I(t) \\ Q(t) = aK(t) \\ Q(t) = Y(t) \end{cases}$$

Với Y, q, K, I là các biến nội sinh, t là biến ngoại sinh.

Gọi $b = \dfrac{1}{a}$: là hệ số gia tăng vốn-sản lượng (hệ số ICOR).

b : là số vốn cần thiết để gia tăng một đơn vị sản lượng đầu ra.

Phân tích mô hình:

Từ mô hình Domar ta

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = I(t) \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{1}{s}\dfrac{dI}{dt} \\ \dfrac{dQ}{dt} = a\dfrac{dK}{dt} \\ \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{dY}{dt} \end{cases}$$

Từ các phương trình trên ta suy ra được phương trình vi phân sau

$$\frac{dI}{dt} - asI(t) = 0$$

Giải phương trình vi phân với điều kiện $I_0 = I(0)$.

Ta có $I(t) = I_0 e^{ast}$. Thay vào các phương trình khác trong mô hình ta có:

$$Y(t) = Y_0 e^{ast};\ K(t) = K_0 e^{ast};\ Q(t) = Q_0 e^{ast}$$

Từ các kết quả trên ta có các nhận xét như sau:

Nhịp tăng trưởng của Y, K, I, Q đều bằng $as = \frac{s}{b}$, sự tăng trưởng này của nền kinh tế là tăng trưởng cân đối.

Giả sử khi đầu tư tăng với nhịp độ $r \neq \frac{s}{b}$

Suy ra $I(t) = I_0e^{rt}$; $\frac{dI}{dt} = rI_0e^{rt}$; $\frac{dY}{dt} = \frac{r}{s}I_0e^{rt}$; $\frac{dQ}{dt} = aI_0e^{rt}$

Xét $\frac{dY}{dt} : \frac{dQ}{dt} = \frac{r}{as}$, từ đó suy ra kết luận sau:

- Nếu đầu tư tăng nhanh hơn mức cần thiết ($r > as$) thì $\frac{dY}{dt} : \frac{dQ}{dt} > 1$, do đó tác động của đầu tư tới năng lực sản xuất yếu hơn tới tổng cầu, nền kinh tế rơi vào tình trạng năng lực sản xuất không đáp ứng được nhu cầu, nghĩa là thiếu hụt năng lực sản xuất.
- Nếu đầu tư tăng chậm hơn mức cần thiết ($r < as$) thì nền kinh tế ở trong tình trạng thừa năng lực sản xuất, đây là một nghịch lý gây ra nhiều tranh luận?

Mô hình được sử dụng trong thực tế là mô hình rời rạc theo thời gian như sau:

$$\begin{cases} K(t) - K(t-1) = I(t) \\ Y(t) = \frac{1}{s}I(t) \\ Q(t) = aK(t) \\ Q(t) = Y(t) \end{cases}$$

Nghiệm của mô hình:

$$\begin{cases} Y(t) = \left(1 + \frac{s}{b-s}\right)Y(t-1) \\ K(t) = \left(1 + \frac{s}{b-s}\right)K(t-1) \\ I(t) = \left(1 + \frac{s}{b-s}\right)I(t-1) \end{cases}$$

Nhịp tăng trưởng của các chỉ tiêu đều bằng $\frac{s}{b-s}$.

BÀI TẬP

1. Cho hàm cung và hàm cầu về một loại hàng hoá lần lượt là

$S(P) = 0,1P^2 + 5P - 10$;

$D(P) = \dfrac{50}{P-2}$

Chứng tỏ luôn tồn tại giá cân bằng nằm trong khoảng (3,5)

Hướng dẫn : Lập hàm $f(p) = S(p) - D(p)$, Tính $f(3), f(5)$ và chứng minh $f(3) \times f(5)$ trái dấu.

2. Cho hàm doanh thu $TR(Q) = 1200Q - Q^2,\ (Q \geq 0)$.

a) Tìm hàm doanh thu cận biên.

b) Tại $Q_0 = 590$, khi Q tăng một đơn vị thì doanh thu sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?

c) Tính giá trị doanh thu biên tại $Q_0 = 610$ và giải thích ý nghĩa.

Hướng dẫn: a) Tính $MR(Q)$; b) $MR(590) = 20$; c) $MR(610) = -20$.

3. Cho hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 30\sqrt{L};\ L \geq 0$

a) Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động MPL.

b) Tại $L_0 = 144$, nếu L tăng thêm một đơn vị, hỏi sản lượng sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?

Hướng dẫn: a) Tính $MPL = Q_L^{/}$; b) $MPL(144) = 1,25$.

4. Cho hàm chi tiêu $C(Y) = aY + b,\ (0 < a < 1, b > 0), Y \geq 0$

a) Tìm hàm xu hướng tiêu dùng cận biên $MCP(Y)$.

b) Cho biết ý nghĩa kinh tế của hệ số a trong biểu thức hàm $C(Y)$.

Hướng dẫn: Tính $MCP(Y) = a$

5. Cho hàm tổng chi phí $TC(Q) = 0,1Q^2 + 0,3Q + 100,\ (Q \geq 0)$

a) Tìm hàm chi phí biên $MC(Q)$.

b) Tính chi phí biên tại mức sản lượng $Q_0 = 120$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Hướng dẫn: a) Tính $MC(Q) = TC^{/}(Q)$; b) $MC(120) = 24,3$.

6. Xét hàm cầu của một loại hàng hoá $D = D(P)$

a) Lập công thức tính hệ số co dãn của cầu tại mức giá P_0.

b) Áp dụng với $D(P) = 6P - P^2$, tại $P_0 = 5$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Hướng dẫn: a) $\varepsilon_D = D'(P_0) \cdot \dfrac{P_0}{D(P_0)}$; b) $\varepsilon_D = -4$.

7. Cho hàm sản xuất $Q = aL^{\alpha}$, $(a > 0, 0 < \alpha < 1)$.

a) Tại mức sử dụng lao động nào đó, tính hệ số co dãn của sản lượng theo lao động.

b) Áp dụng cho $Q = 40L^{0,4}$, tại $L_0 = 20$.

Hướng dẫn: a) $\varepsilon_{Q/L} = \alpha$; b) $\varepsilon_{Q/L} = 0,4$.

8. Cho hàm sản xuất $Q = 120L^2 - L^3$, $L > 0$. Hãy xác định mức sử dụng lao động để sản lượng tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $L = 80$.

9. Cho hàm sản xuất $Q = 30L^{\frac{2}{3}}$, $L > 0$. Tại mức sử dụng lao động bất kỳ, nếu lao động tăng 10% hỏi sản lượng thay đổi bao nhiêu %.

Hướng dẫn: $\varepsilon_{Q/L} = \dfrac{2}{3}$.

10. Cho hàm sản phẩm biên của lao động $MPL = 40 \times L^{0.5}$. Tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, biết $Q(100) = 4000$.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q = 80L^{1,5} - 76000$.

11. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là : $MC(Q) = 8 \times e^{0,2Q}$ và chi phí cố định $FC = 50$. Tìm hàm tổng chi phí.

Hướng dẫn: Đáp số: $TC(Q) = 40e^{0,2Q} + 10$.

12. Cho hàm doanh thu biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 50 - 2Q - 3Q^2$. Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Hướng dẫn: Đáp số: $TR(Q) = 50Q - Q^2 - Q^3$; $P = 50 - Q - Q^2$.

13. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 32 + 18Q - 12Q^2$ và $FC = 43$. Hãy tìm hàm tổng chi phí và chi phí khả biến.

Hướng dẫn: Đáp số: $TR(Q) = 43 + 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$; $VC = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$.

14. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 12e^{0,5Q}$ và $FC = 36$. Hãy tìm hàm tổng chi phí.

Hướng dẫn: Đáp số: $TC(Q) = 24e^{0,5Q} + 12$.

15. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 40Q - 16e^{0,4Q}$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu.

Hướng dẫn: Đáp số: $TR(Q) = 40 + 20Q^2 - 40e^{0,4Q}$.

16. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 84 - 4Q - Q^2$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu và hàm cầu.

Hướng dẫn: Đáp số: $TR(Q) = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$; $P = 84 - 2Q - \frac{1}{3}Q^2$.

17. Cho hàm tiêu dùng (chi tiêu) $C(Y) = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + 300$; $Y \geq 0$

a) Tại mức thu nhập $Y_0 = 169$ nếu thu nhập tăng thêm 1 thì mức tiêu dùng thay đổi như thế nào?

b) Tính MPC(Y) tại mức thu nhập $Y_0 = 144$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Hướng dẫn: a) $C^{/}(169) \approx 0,81$; b) $MPC(144) \approx 0,81$.

18. Cho các hàm cầu $Q_1 = 40 - P_1; Q_2 = 30 - 0,5P_2$. Hãy lập hàm doanh thu.

Hướng dẫn: Đáp số: $TR = -Q_1^2 - 2Q_2^2 + 40Q_1 + 60Q_2$.

19. Cho hàm sản xuất $Q = 10K^{0,3}L^{0,4}$ giá thuê 1 đơn vị K bằng 3$, giá thuê một đơn vị L bằng 2$ và giá sản phẩm là $P = 4$. Hãy lập hàm lợi nhuận $\pi(K, L)$.

Hướng dẫn: Đáp số: $\pi = 40K^{0,3}L^{0,4} - 3K - 2L$.

20. Cho hàm sản xuất $Q = 20K^{1/4}L^{3/4}$. Hãy tìm sản lượng cận biên tại $K = 16, L = 81$. Giải thích ý nghĩa.

Hướng dẫn: a) $\frac{\partial Q}{\partial K}(16, 25) = 16,875; \frac{\partial Q}{\partial L}(16, 25) = 10$.

21. Cho hàm hữu dụng (hàm tiêu dùng của hộ gia đình) $TU(x_1, x_2) = 2\sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$.

Hãy tính lợi ích cận biên của hàng hoá 1, 2 tại mức tiêu dùng tương ứng 64 và 25. Giải thích ý nghĩa.

Hướng dẫn: $\frac{\partial TU}{\partial x_1}(64, 25) = \frac{5}{24}; \frac{\partial TU}{\partial x_2}(64, 25) = \frac{4}{5}$.

22. Cho hàm cầu $D = 0,4Y^{0,2}p^{-0,3}$. Hãy tính $\varepsilon_{D/Y}$ và $\varepsilon_{D/P}$

Hướng dẫn: Đáp số: $\varepsilon_{D/Y} = 0,2$; $\varepsilon_{D/P} = -0,3$.

23. Tính hệ số co dãn của các hàm sau tại điểm cho trước

a) $Q(P_1, P_2) = 6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2$, tại $(20,30)$.

b) $Q(K,L) = 120K^{1/3}L^{2/3}$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $\varepsilon_Q = -1{,}15$. b) $\varepsilon_Q = 1$.

24. Cho hàm sản xuất $Y(t) = 0,2K^{0,4}L^{0,8}$:

Trong đó: $K = 120 + 0,1t$; $L = 300 + 0,3t$

a) Tính hệ số co dãn của Y theo K và theo L.

b) Tính hệ số tăng trưởng của vốn K, lao động L và Y.

c) Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất trong trường hợp này.

Hướng dẫn: Đáp số:

a) $\varepsilon_{Y/K} = 0,4$; $\varepsilon_{Y/L} = 0,8$.

b) $r_K = \dfrac{0,1}{120+0,1t}$; $r_L = \dfrac{0,1}{100+0,1t}$; $r_Y = \dfrac{0,04}{120+0,1t} + \dfrac{0,08}{100+0,1t}$

c) Tính hệ số co dãn toàn phần: $\varepsilon_Y = 1,2$.

25. Cho hàm sản xuất $Y(t) = 5K^{0,6}L^{0,3}$:

a) Tính hệ số thay thế của K cho L.

b) Cho biết chi phí đơn vị vốn $w_K = 5$, chi phí đơn vị lao động $w_L = 3$. Tính mức sử dụng tối ưu vốn và lao động để đạt mức sản lượng cho trước $Y_0 = 30000$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $\dfrac{dK}{dL} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{K}{L}$; b) $K \approx 16762$, $L \approx 13969$.

26. Thu nhập quốc dân (Y) của một quốc gia có dạng:

$$Y = 0,48K^{0,4}L^{0,3}NX^{0,01}$$

Trong đó: K là vốn, L là lao động và NX là xuất khẩu ròng.

a) Khi tăng 1% lao động sẽ ảnh hưởng như thế nào đến thu nhập?

Có ý kiến cho rằng giảm mức lao động xuống 2% thì có thể tăng xuất khẩu ròng 15% mà thu nhập vẫn không đổi, cho biết điều này đúng hay sai?

b) Cho nhịp tăng trưởng của NX là 4%, của K là 3%, của L là 5%. Xác định nhịp tăng trưởng của Y.

Hướng dẫn: Đáp số: a) Tính $\varepsilon_{Y/L} = 0,3$; $\varepsilon_{Y/Nx} = 0,01$; sai; b) $r_Y = 2,74\%$.

27. Giả sử dân số tăng theo mô hình $P(t) = P(0)2^{bt}$ và tiêu dùng dân cư tăng theo mô hình $C(t) = C(0)e^{at}$.

a) Tính hệ số tăng trưởng của dân số và tiêu dùng của dân cư.

b) Với điều kiện nào thì hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số. Nêu ý nghĩa của quan hệ đó.

c) Giả thiết lượng lao động được sử dụng tỉ lệ với dân số và có dạng $L(t) = kP(t)$ ($k < 1$); sản lượng $Y(t)$ là một hàm của vốn $K(t)$ và lao động có dạng Cobb - Douglas và $C(t)$ là một hàm tuyến tính của $Y(t)$. Xác định một mô hình thể hiện mối quan hệ giữa các biến.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $r_P = b\ln 2$; $r_C = a$; b) $a > b\ln 2$.

28. Cho hàm tổng chi phí: $TC(Q) = Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144$

a) Tính hệ số co dãn của TC theo Q tại $Q = 2$.

b) Cho giá sản phẩm là $P = 70$, với mức thuế doanh thu 20%, tính lợi nhuận khi $Q = 3$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $\varepsilon_{TC/Q=2} = 0{,}075$; b) 0.

29. Cho nhu cầu hai mặt hàng phụ thuộc vào giá như sau:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2;\ Q_2 = 35 - P_1 - P_2$$

Hàm tổng chi phí là $TC = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 12$. Trong đó Q_i, P_i là sản lượng và giá của hàng hóa.

a) Xác định Q_1, Q_2 sao cho tổng lợi nhuận là lớn nhất.

b) Xác định chi phí biên cho từng mặt hàng tối ưu tìm được câu a.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $Q_1 = \frac{25}{7}; Q_2 = \frac{65}{14}$; b) $\frac{\partial TC}{\partial Q_1} = \frac{50}{7}; \frac{\partial TC}{\partial Q_2} = \frac{65}{7}$.

30. Cho hàm tổng chi phí $TC = 5000 + \frac{5Q^2}{Q+3}$

a) Tìm hàm chi phí biên MC.

b) Tính chi phí trung bình AC tại $Q = 100$.

c) Tính hệ số co dãn của TC theo Q tại $Q = 17$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $MC = \dfrac{5Q^2 + 30Q}{(Q+3)^2}$;

b) $AC(100) = 54,8544$; c) $\varepsilon_{TC/Q=17} = 0,0164$

31. Cho mô hình cung – cầu như sau:

$$Q_D = 10 + 0,1Y - 0,2P$$
$$Q_S = -14 + 0,6P$$

Trong đó: Q_D, Q_S cung cấp và nhu cầu một loại hàng; Y là thu nhập trong dân cư (theo đầu người); P là giá cả.

a) Tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là:

a1. $Q_D = Q_S$

a2. $Q_D = 0,9Q_S$

b) Tính hệ số co dãn của giá cân bằng theo Y tại 80 trong cả hai trường hợp trên. Giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả tính được.

Hướng dẫn: Đáp số: a) a1) $P = 30 + \dfrac{1}{8}Y$; a2) $P = \dfrac{1230}{37} + \dfrac{5}{37}Y$;

b) a1) $\varepsilon_{P/Y} = 0,25$; a2) $\varepsilon_{P/Y} = \dfrac{40}{163}$.

32. Cho hàm lợi ích tiêu dùng của một chủ thể có dạng như sau:

$$\ln\left(TU(x,y)\right) = 0,7\ln x + 0,3\ln y$$

Cho biết x, y là khối lượng các hàng hóa. Cho p,q là giá các hàng hóa tương ứng, M là ngân sách tiêu dùng.

a) Có ý kiến cho rằng, nếu chủ thể trên tăng tiêu dùng x lên 1% và giảm tiêu dùng y đi 3% thì lợi ích tiêu dùng không đổi. Điều đó đúng hay sai.

b) Xác định phương án tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó.

Hướng dẫn: Đáp số: a) Tính $\varepsilon_{TU/x} = 0,7$; $\varepsilon_{TU/y} = 0,3$ nhận xét sai

b) $x = \frac{qM}{pq + p}$; $y = \frac{M}{q + 1}$.

33. Mỗi cá nhân sẽ được lợi từ thu nhập (INCOME) và nghỉ ngơi (LEISURE). Giả sử mỗi ngày có 12 giờ để chia ra thời gian làm việc và nghỉ ngơi.

Tiền lương cho mỗi giờ làm việc là 3$ và hàm lợi ích của cá nhân là

$$TU = L^{0,5} I^{0,75}$$

Trong đó: L: là số giờ nghỉ ngơi; I : là thu nhập.

Cá nhân này sẽ cân đối giữa thời gian nghỉ ngơi và làm việc thế nào để tối đa hóa lợi ích của mình?

Hướng dẫn: Ta có ràng buộc $I + 3L = 36$, Lập hàm Lagrange giải ra $I = 21,6;\ L = 4,8$.

34. Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế (đóng) có mối liên hệ sau:

$$Y = C + I + G;\ C = 0,85Y_d + 70;\ Y_d = Y - T$$

Trong đó: Y thu nhập quốc dân; C tiêu dùng dân cư; Y_d thu nhập khả dụng; I đầu tư; G chi tiêu chính phủ; T thuế. Với $I = 200,\ G = 550,\ T = 500$. Hãy

a) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.

b) Phân tích chủ trương "kích cầu" của chính phủ thông qua chính sách giảm thuế.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $Y = 2633,33$; b) Giảm thuế thì thu nhập tăng lên.

35. Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế có mối liên hệ sau

$$Y = C + I + G + X - M;\ C = 0,08Y_d;\ M = 0,015Y_d;\ Y_d = (1 - t)Y$$

Trong đó: Y thu nhập quốc dân; C tiêu dùng dân cư; Y_d thu nhập khả dụng; I đầu tư; G chi tiêu chính phủ; X xuất khẩu; M nhập khẩu; t thuế.

Với $I = 700,\ G = 900,\ X = 600,\ t = 0,15$. Hãy

a) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.

b) Với chỉ tiêu ở câu a, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng tới thu nhập. Hãy nhận xét ý kiến này.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $Y = 2328,66$; b) Tính $\varepsilon_{Y/X} = \frac{3}{11}; \varepsilon_{Y/G} = \frac{9}{22}$.

36. Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệpcó dạng: Q = K(L +5), trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là 70 và giá một đơn vị lao động là 20.

a) Nếu doanh nghiệp nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Tính mức sử dụng vốn và lao động sao cho việc sản xuất lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất?

b) Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K, L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?

c) Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?

Hướng dẫn: a) Dùng phương pháp Lagrange; b), c) áp dụng công thức.

37. Một công ty có hàm sản xuất: Q = 0,5K(L – 2), trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là $p_K = 120$ và giá một đơn vị lao động là $p_L = 60$.

a) Nếu doanh nghiệp chi số tiền 3000. Tính mức sử dụng vốn và lao động để tối đa hóa sản lượng?

b) Tính hệ số thay thế giữa 2 yếu tố K, L tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?

c) Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?

Hướng dẫn: a) $L = 12, K = 26$; b) 0.5; c) 0.005.

38. Một công ty có hàm sản xuất: $Q = K^{3/4}L^{1/2}$ (K – vốn, L – lao động). Biết giá một đơn vị vốn là $p_K = 30$ và lao động là $p_L = 5$

a) Công ty cần sản xuất 2048 sản phẩm, khi đó công ty nên sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và lao động để tối thiểu hóa chi phí

b) Tại thời điểm tối thiểu hóa chi phí, nếu sản lượng tăng lên 2% thì chi phí sẽ thay đổi như thế nào?

Hướng dẫn: a) $L = 256, K = 1024$; b) 1.6%.

39. Cho hàm sản xuất: $Y(t) = 0,4K^{0,5}.L^{0,9}$ trong đó K là vốn, L là lao động

a) Nếu tăng vốn K thêm 9% thì có thể giảm bớt lao động L đi bao nhiêu % để Y không đổi?

b) Sang năm tiếp theo nếu tăng vốn K 15%, lao động L 10% thì Y biến động như thế nào?

c) Cho biết hiệu quả của việc tăng qui mô sản xuất của hàm sản xuất trên.

Hướng dẫn: a) 5%; b) 16.5%; c) Tăng qui mô có hiệu quả.

40. Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} Y = C + I + G_0 \\ C = b_0 + b_1 Y \qquad\qquad (a_0, a_1, b_0, b_1 > 0;\ a_1 + b_1 < 1) \\ I = a_0 + a_1 Y - a_2 R_0 \end{cases}$$

trong đó: G_0 là chi tiêu chính phủ; R_0 là lãi suất; I là đầu tư; C là tiêu dùng; Y là thu nhập

a) Hãy xác định Y, C ở trạng thái cân bằng.

b) Với $b_0 = 200$; $b_1 = 0,7$; $a_0 = 100$; $a_1 = 0,2$, $a_2 = 10$; $R_0 = 7$; $G_0 = 500$, khi tăng chi tiêu của chính phủ 1% thì thu nhập cân bằng thay đổi bao nhiêu %?

Hướng dẫn: a) Giải hệ tìm Y, C; b) Tính hệ số co dãn.