Chương 2

MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ

1. CÁC MÔ HÌNH KINH TẾ.

1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất để đạt lợi nhuận tối đa

Bài toán. Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $TC = TC(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán. Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q)$, mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q$ và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = D^{-1}(Q) \times Q - TC(Q)$.

Vậy theo yêu cầu bài toán, ta cần tìm Q sao cho π đạt **giá trị lớn nhất**.

Chú ý rằng để phù hợp với thực tế thì tại $Q = Q_0$ ta phải có lợi nhuận, đơn giá và tổng chi phí đều dương.

Ví dụ 1. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000$. Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải

Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 656 - \frac{1}{2}P = Q \Leftrightarrow P = 1312 - 2Q,$$

Mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q = (1312 - 2Q) \times Q = -2Q^2 + 1312Q$$

và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$$\begin{aligned} \pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) \\ &= -2Q^2 + 1312Q - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000) \\ &= -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 40000 \end{aligned}$$

Bây giờ ta tìm $Q > 0$ sao cho π đạt giá giạ lớn nhất. Ta có

$$\pi^{/}(Q) = -3Q^2 + 150Q^2 + 312$$

Suy ra, $\pi^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 150Q + 312 = 0 \Leftrightarrow Q = -2$ (loại) hay $Q = 52$.

Mặt khác, $\pi^{//}(Q) = -6Q + 150$ nên $\pi^{//}(52) = -162 < 0$. Vậy $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = 52$.

Khi đó, ta có các kết quả phù hợp sau :

Lợi nhuận : $\pi = 38416$,

Đơn giá : $P = 1208$,

Tổng chi phí : $TC = 24400$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức sản lượng $Q = 52$. Khi đó lợi nhuận tương ứng là $\pi = 38416$.

1.2. Bài toán thuế doanh thu

Bài toán. Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $TC = TC(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải quyết bài toán. Với một mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm, xí nghiệp định mức sản lượng Q phụ thuộc vào thuế t sao cho đạt lợi nhuận tối đa. Với mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q)$, mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q$ và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = D^{-1}(Q) \times Q - TC(Q)$.

Trong đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là

$T(t) = Q \times t$.

Vậy theo yêu cầu bài toán, ta cần tìm $Q = Q(t)$ sao cho $\pi(Q)$ đạt **giá trị lớn nhất**. Khi đó với tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là $T(t) = Q(t) \times t$. Ta cần tìm giá trị $t > 0$ sao cho $T(t) = Q(t) \times t$ đạt cực đại.

Chú ý rằng để phù hợp với thực tế thì tại $t > 0$ tìm được ta phải có mức sản lượng và đơn giá, lợi nhuận, tổng chi phí đều dương.

Ví dụ 2. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2000 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^2 + 1000Q + 50$. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải

Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 2000 - P = Q \Leftrightarrow P = 2000 - Q.$$

Mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q = (2000 - Q) \times Q = -Q^2 + 2000Q$$

Tiền thuế của xí nghiệp là : $T(t) = Q \times t$,

và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là :

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) - Qt\\ &= -Q^2 + 2000Q - (Q^2 + 1000Q + 50) - Qt\\ &= -2Q^2 + (1000 - t)Q - 50\end{aligned}$$

Bây giờ ta tìm $Q > 0$ sao cho π đạt giá giạ lớn nhất. Ta có

$$\pi^{/}(Q) = -4Q + 1000 - t$$

Suy ra, $\pi^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow -4Q + (1000 - t) = 0 \Leftrightarrow Q = (1000 - t)/4$. Khi đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là :

$T(t) = Q \times t = (1000t - t^2)/4$, ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại.

Ta có, $T^{/}(t) = (1000 - 2t)/4$, suy ra $T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500$.

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 500$

Khi đó, ta có các kết quả phù hợp sau :

Sản lượng : $Q = 125$, Lợi nhuận : $\pi = 31200$,

Đơn giá : $P = 1875$, Tổng chi phí : $TC = 14067$.

Tiền thuế thu được là : $T = 62500$. Khi định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$.

1.3. Bài toán thuế nhập khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế **cộng với chi phí nhập khẩu** (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 < P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng (là điểm mà tại đó mức cung bằng lượng cầu) của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải quyết bài toán. Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thoả điều kiện $t > 0$ và $t + P_1 < P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ nhập sản phẩm trên để bán với đơn giá P thoả $t + P_1 < P < P_0$ với số lượng là $Q_D - Q_S = D(P) - S(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)\left[D(P) - S(P)\right].$$

Tuy nhiên công ty sẽ chọn đơn giá để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $P = P(t)$ và tiền thuế công ty phải nộp là :

$$T(t) = t \times [D(P(t)) - S(P(t))].$$

Để thu được thuế nhiều nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế phải thoả $t + P_1 < P_0$ và để phù hợp với thực tế ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ 3. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 = 1600$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải

Trước hết ta tìm điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200 \ (P_0 = 2200)$$

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thoả điều kiện :

$$1600 + t < 2200 \ (*)$$

Khi đó

Lượng hàng mà công ty nhập về là :

$$Q_D - Q_S = (4200 - P) - (P - 200) = 4400 - 2P.$$

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\begin{aligned}\pi(P) &= (P - P_1 - t)\left[Q_D - Q_S\right] \\ &= (P - 1600 - t)(4400 - 2P) \\ &= -2P^2 + 2(3800 + t)P - 4400(1600 + t).\end{aligned}$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có

$\pi^{/}(P) = -4P + 2(3800 + t)$, suy ra

$\pi^{/}(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(3800 + t) = 0 \Leftrightarrow P = 1900 + \dfrac{t}{2}$, và vì $\pi^{//}(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 1900 + (1/2)t$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là :

$T(t) = t\left[Q_D - Q_S\right] = t(4400 - 2P) = t(600 - t)$. Ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$T^{/}(t) = 600 - 2t$, suy ra $T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 600 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 300$.

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 300$, như vậy với $T(t) = 90000$. Thoả mãn $(*)$, và ta có các số liệu phù hợp sau :

Đơn giá : $P = 2025 > 0$,

Lượng cung : $Q_S = 1850 > 0$,

Lượng cầu : $Q_D = 2150 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 300$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 90000$.

1.4. Bài toán thuế xuất khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế **trừ đi chi phí xuất khẩu** (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 > P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng (là điểm mà tại đó mức cung bằng lượng cầu) của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng xuất khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải quyết bài toán. Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thoả điều kiện $t > 0$ và $P_1 - t > P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ mua sản phẩm trên với đơn giá P thoả $P_0 < P < P_1 - t$ với số lượng là $Q_S - Q_D = S(P) - D(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P_1 - P - t)\left[S(P) - D(P)\right].$$

Tuy nhiên công ty sẽ chọn đơn giá mua để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $P = P(t)$ và tiền thuế công ty phải nộp là :

$$T(t) = t \times \left[S(P(t)) - D(P(t))\right].$$

Để thu được thuế nhiều nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế phải thoả $P_1 - t > P_0$ và để phù hợp với thực tế ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ 4. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 = 3200$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải

Trước hết ta tìm điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200 \ (P_0 = 2200)$$

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thoả điều kiện :

$$t > 0; \quad 3200 - t > 2200 \ (*)$$

Khi đó

Lượng hàng mà công ty xuất khẩu là :

$$Q_S - Q_D = (P - 200) - (4200 - P) = 2P - 4400.$$

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\begin{aligned}\pi(P) &= (P_1 - P - t)\left[Q_S - Q_D\right]\\ &= (3200 - P - t)(2P - 4400)\\ &= -2P^2 + 2(5400 - t)P - 4400(3200 - t).\end{aligned}$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có

$$\pi^{/}(P) = -4P + 2(5400 - t)$$, suy ra

$\pi^{/}(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(5400 - t) = 0 \Leftrightarrow P = 2700 - \dfrac{t}{2}$, và vì $\pi^{//}(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 2700 - (1/2)t$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là :

$T(t) = t\left[Q_S - Q_D\right] = t(2P - 4400) = t(1000 - t)$. Ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$T^{/}(t) = 1000 - 2t$, suy ra $T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500$.

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 500$, như vậy với $T(t) = 250000$. Thoả mãn $(*)$, và ta có các số liệu phù hợp sau :

Đơn giá : $P = 2450 > 0$,

Lượng cung : $Q_S = 2250 > 0$,

Lượng cầu : $Q_D = 1750 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 250000$.

1.5. Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo.

Bài toán. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá hai loại sản phẩm trên thị trường là P_1, P_2 và hàm tổng chi phí là : $TC = TC(Q_1, Q_2)$ (Q_1, Q_2 là các sản lượng). Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán. Điều kiện về mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1, Q_2 > 0$. Khi đó, ta có

Doanh thu là : $TR(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2$.

Lợi nhuận là : $\pi(Q_1, Q_2) = TR - TC = P_1Q_1 + P_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$.

Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 sao cho tại đó $\pi(Q_1, Q_2)$ đạt cực đại. Lưu ý cần kiểm tra lại các đại lượng khác như chi phí, lợi nhuận phải dương để phù hợp với thực tế.

Ví dụ 5. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá hai loại sản phẩm trên thị trường là $P_1 = 56$ và $P_2 = 40$. Hàm tổng chi phí là : $TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải

Điều kiện về mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1, Q_2 > 0$. Khi đó, ta có

Doanh thu là : $TR = P_1Q_1 + P_2Q_2 = 56Q_1 + 40Q_2$.

Lợi nhuận là : $\pi = TR - TC = 56Q_1 + 40Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$.

Để đạt lợi nhuận cao nhất, ta cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 sao cho tại đó $\pi(Q_1, Q_2)$ đạt cực đại.

Lưu ý đây là bài toán cực trị hàm hai biến theo Q_1, Q_2.

Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của $\pi(Q_1, Q_2)$, ta có

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}(Q_1, Q_2) = 56 - 4Q_1 - 2Q_2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}(Q_1, Q_2) = 40 - 2Q_1 - 2Q_2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(56 - 4Q_1 - 2Q_2\right) = -4$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(40 - 2Q_1 - 2Q_2\right) = -2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(40 - 2Q_1 - 2Q_2\right) = -2$$

Để khảo sát cực trị ta tìm các điểm dừng, bằng cách giải hệ sau :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1}(Q_1, Q_2) = 56 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2}(Q_1, Q_2) = 40 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 8 \\ Q_2 = 12 \end{cases}$$

Vậy π có một điểm dừng là $(Q_1, Q_2) = (8, 12)$.

Xét tại điểm dừng $(Q_1, Q_2) = (8, 12)$, ta có $A = -4 < 0; C = -2; B = -2$, $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$ nên π đạt cực đại tại $(Q_1, Q_2) = (8, 12)$. Khi đó

Chi phí : $TC = 464$, lợi nhuận : $\pi = 464$

Kết luận : Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần định mức sản lượng của hai loại sản phẩm lần lược là : $Q_1 = 8$ và $Q_2 = 12$.

1.6. Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện sản xuất độc quyền.

Bài toán. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là $Q_{D_1} = D_1(P_1, P_2)$ và $Q_{D_2} = D_2(P_1, P_2)$ (P_1, P_2 đơn giá) và hàm tổng chi phí là : $TC = TC(Q_1, Q_2)$ (Q_1, Q_2 là các sản lượng). Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán. Điều kiện về mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1, Q_2 > 0$. Do sản xuất độc quyền với các mức sản lượng trên, để tiêu thụ hết sản phẩm xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho :

$$\begin{cases} Q_{D_1} = Q_1 \\ Q_{D_2} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1(P_1, P_2) = Q_1 \\ D_2(P_1, P_2) = Q_2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $\begin{cases} P_1 = P_1(Q_1, Q_2) \\ P_2 = P_2(Q_1, Q_2) \end{cases}$.

Khi đó, ta có

Doanh thu là :

$$TR(Q_1, Q_2) = P_1(Q_1, Q_2) \times Q_1 + P_2(Q_1, Q_2) \times Q_2.$$

Lợi nhuận là :

$$\pi(Q_1, Q_2) = TR - TC = P_1(Q_1, Q_2) \cdot Q_1 + P_2(Q_1, Q_2) \cdot Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 sao cho tại đó $\pi(Q_1, Q_2)$ đạt cực đại. Lưu ý cần kiểm tra lại các đại lượng khác như chi phí, lợi nhuận phải dương để phù hợp với thực tế.

Ví dụ 6. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là :

$$Q_{D_1} = \frac{1230 - 5P_1 + P_2}{14} \text{ và } Q_{D_2} = \frac{1350 + P_1 - 3P_2}{14}.$$

Với hàm tổng chi phí là : $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải

Điều kiện về mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1, Q_2 > 0$. Do sản xuất độc quyền với các mức sản lượng trên, để tiêu thụ hết sản phẩm xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho :

$$\begin{cases} Q_{D_1} = Q_1 \\ Q_{D_2} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1230 - 5P_1 + P_2}{14} = Q_1 \\ \dfrac{1350 + P_1 - 3P_2}{14} = Q_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5P_1 + P_2 = 14Q_1 - 1230 \\ P_1 - 3P_2 = 14Q_2 - 1350 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 360 - 3Q_1 - Q_2 \\ P_1 = 570 - Q_1 - 5Q_2 \end{cases}$$

Khi đó, ta có

Doanh thu là :

$$
\begin{aligned}
TR(Q_1, Q_2) &= P_1(Q_1, Q_2) \times Q_1 + P_2(Q_1, Q_2) \times Q_2 \\
&= (360 - 3Q_1 - Q_2) \times Q_1 + (570 - Q_1 - 5Q_2) \times Q_2 \\
&= -3Q_1^2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2
\end{aligned}
$$

Lợi nhuận là :

$$
\begin{aligned}
\pi(Q_1, Q_2) &= TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2) \\
&= -3Q_1^2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2 - (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2) \\
&= -4Q_1^2 - 6Q_2^2 - 3Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2
\end{aligned}
$$

Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 sao cho tại đó $\pi(Q_1, Q_2)$ đạt cực đại.

Lưu ý đây là bài toán cực trị hàm hai biến theo Q_1, Q_2.

Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của $\pi(Q_1, Q_2)$, ta có

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}(Q_1, Q_2) = -8Q_1 - 3Q_2 + 360$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}(Q_1, Q_2) = -12Q_2 - 3Q_1 + 570$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(-8Q_1 - 3Q_2 + 360\right) = -8$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_2}\left(-12Q_2 - 3Q_1 + 570\right) = -12$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\left(Q_1, Q_2\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_1}\left(-12Q_2 - 3Q_1 + 570\right) = -3$$

Để khảo sát cực trị ta tìm các điểm dừng, bằng cách giải hệ sau :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1}(Q_1, Q_2) = -8Q_1 - 3Q_2 + 360 = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2}(Q_1, Q_2) = -12Q_1 - 3Q_2 + 570 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
Q_1 = 30 \\
Q_2 = 40
\end{cases}
$$

vậy π có một điểm dừng là $(Q_1, Q_2) = (30, 40)$.

Xét tại điểm dừng $(Q_1, Q_2) = (30, 40)$, ta có $A = -8 < 0;\ C = -12;\ B = -3;$ $\Delta = AC - B^2 = 87 > 0$, nên π đạt cực đại tại $(Q_1, Q_2) = (30, 40)$. Khi đó

Chi phí : $TC = 3700$,

Lợi nhuận : $\pi = 16800$

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần định mức sản lượng của hai loại sản phẩm lần lược là : $Q_1 = 30$ và $Q_2 = 40$.

1.7. Bài toán người tiêu dùng

Bài toán. Một người dành một số tiền M để mua hai loại sản phẩm có đơn giá lần lượt là P_1 và P_2. Hàm hữu dụng ứng với hai loại sản phẩm trên là $TU = TU(x_1, x_2)$ (x_1, x_2 lần lượt là số lượng các sản phẩm). Hãy xác định số lượng các loại sản phẩm trên sao cho hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

Giải quyết bài toán. Gọi x_1, x_2 lần lượt là số lượng sản phẩm. Với điều kiện $x_1, x_2 > 0$. Khi đó $x_1P_1 + x_2P_2 = M$, do đó để hàm hữu dụng đạt giá trị lớn nhất, ta cần tìm cực đại của hàm hữu dụng $TU = TU(x_1, x_2)$ với điều kiện $x_1P_1 + x_2P_2 = M$.

Lưu ý rằng đây là bài toán cực trị có ràng buộc.

Ví dụ 7. Một người muốn dùng số tiền 4000000 đồng để mua hai mặt hàng có đơn giá $P_1 = 400000$ đồng và $P_2 = 500000$ đồng. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $TU = (x_1 + 5)(x_2 + 4)$ (x_1, x_2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai loại mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

Giải

Với x_1, x_2 lần lượt là số lượng của hai mặt hàng, theo đề bài ta có điều kiện ràng buộc cho x_1, x_2 bởi

$$400000x_1 + 500000x_2 = 4000000 \Leftrightarrow 4x_1 + 5x_2 = 40 \quad (*).$$

Ta cần tìm $x_1, x_2 > 0$ để hàm hữu dụng $TU = (x_1 + 5)(x_2 + 4)$ đạt cực đại với ràng buộc $(*)$.

$TU = (x_1 + 5)(x_2 + 4)$, với ràng buộc $g(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 - 40$

Hàm Lagrange: $L(x_1, x_2, \lambda) = TU(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + 5)(x_2 + 4) + \lambda(4x_1 + 5x_2 - 40)$$

Ta có đạo hàm riêng cấp 1 của L như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = x_2 + 4 + 4\lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 5 + 5\lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + 5x_2 - 40 \end{cases}$$

Tìm điểm dừng của L bằng cách giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_2 + 4 + 4\lambda = 0 \\ x_1 + 5 + 5\lambda = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Vậy L có một điểm dừng là $(x_1, x_2, \lambda) = (5, 4, -2)$

Tại $(x_1, x_2, \lambda) = (5, 4, 2)$ ta xét

$$\begin{aligned} d^2L &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(dx_2)^2 \\ &= 2dx_1dx_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Với dx, dy thoả mãn điều kiện sau :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0 \Leftrightarrow 4dx_1 + 5dx_2 = 0$$

$\Leftrightarrow dx_1 = -\dfrac{5}{4}dx_2$ thay vào (1) ta được

$$d^2L = 2\left(-\frac{5}{4}dx_2\right)dx_2 = -\frac{5}{2}(dx_2)^2 < 0.$$

Vậy TU đạt cực đại tại $(x_1, x_2) = (5, 4)$ và $TU(5, 4) = 80$.

Kết luận: Để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất, thì người đó cần hai mặt hàng trên với số lượng lần lượt là 5 và 4. Khi đó giá trị hàm hữu dụng là $TU(5, 4) = 80$.

2. MÔ HÌNH CÂN ĐỐI LIÊN NGÀNH (MÔ HÌNH VÀO – RA, INPUT - OUTPUT)

2.1. Vài nét giới thiệu về bảng vào-ra (I/O)

Bảng vào-ra (Input-outphut tabales- I/O) lần đầu tiên được Wasily Leontief đưa ra vào năm 1927.

Thực chất của bảng này là phương pháp "sổ kép", ghi lại sự phân phối sản phẩm của các ngành trong nền kinh tế quốc dân, và quá trình hình thành sản phẩm của mỗi ngành.

Mỗi ngành đều có 2 chức năng: sản xuất ra sản phẩm cung cấp cho chính mình và cho các ngành khác như là các yếu tố đầu vào, và một phần dùng cho tích lũy tiêu dùng và xuất khẩu.

Đồng thời mỗi ngành lại tiêu thụ sản phẩm của các ngành khác, như là yếu tố đầu vào cho quá trình sản xuất của mình.

Ngoài ra mỗi ngành còn phải sử dụng lao động, thuế với nhà nước, thu lợi nhuận cho chính mình...

Mô hình I/O đồng thời phân tích các quan hệ kinh tế giữa các ngành theo các nội dung sau:

- Giá trị sản phẩm của mỗi ngành, được phân phối cho ai? Và phân phối như thế nào?
- Giá trị sản phẩm của mỗi ngành, được hình thành như thế nào?
- Phân tích tác động dây chuyền trong nền kinh tế
- ...

2.2. Cấu trúc bảng vào-ra

2.2.1. Ngành thuần túy.

Nền kinh tế quốc dân là một thể thống nhất gồm n ngành sản xuất thuần túy.

Các đơn vị được xếp cùng một ngành, là sản xuất các sản phẩm có công dụng giống nhau, có thể thay thế hoàn toàn cho nhau.

Thí dụ 8.

1. Nông nghiệp và lâm nghiệp
2. Thủy sản (Nuôi trồng và khai thác)
3. Khai mỏ, khai khoáng
4. Chế biến
5. Sản xuất và phân phối điện
6. Xây dựng
7. Thương nghiệp và sửa chữa vật phẩm tiêu dùng
8. Khách sạn
9. Vận tải, kho bãi và thông tin liên lạc
10. Tài chính, tín dụng
11. Hoạt động khoa học công nghệ.
12. Kinh doanh tài sản và dịch vụ tư vấn
13. Quản lí nhà nước, an ninh quốc phòng
14. Giáo dục, đào tạo
15. Y tế và hoạt động cứu trợ xã hội
16. Văn hóa, thể thao
17. Hoạt động Đảng, đoàn thể, hiệp hội
18. Hoạt động phục vụ cá nhân và cộng đồng
19. Hoạt động làm thuê công việc gia đình trong các hộ tư nhân
20. Hoạt động của các tổ chức và doàn thể quốc tế

2.2.2. Giá trị sản xuất (GO)

Giá trị sản xuất là một chỉ tiêu tổng hợp, được tính bằng giá trị sản lượng của tất cả các ngành. Khi tính riêng cho từng ngành, ta có giá trị sản xuất của ngành.

Ví dụ 9.

- Đối với ngành sản xuất hàng hóa bán trên thị trường:

Giá trị sản xuất $=$ Doanh thu bán hàng $+$ giá trị hàng sử dụng khác $+$ giá trị thay đổi tồn kho.

- Đối với thương nghiệp:

Giá trị sản xuất = Doanh thu bán hàng + giá trị hàng hóa sử dụng khác + giá trị thay đổi tồn kho − nguyên giá háng bán.

- Đối với ngành dịch vụ:

Giá trị sản xuất = doanh thu

- Đối với các ngành nhận vốn từ ngân sách:

Giá trị sản xuất = Tổng các nguồn kinh phí do ngân sách cấp − trừ khoản chi có tính chất đầu tư tích lũy tài sản.

2.2.3. Nhu cầu chi phí trung gian

Giá trị sản phẩm của mỗi ngành làm ra, chỉ dùng cho mục đích sản xuất của ngành mình, và cho các ngành khác được gọi là chi phí trung gian. Giá trị sản phẩm của các ngành làm ra phục vụ cho nhu cầu trung gian được sử dụng hết trong quá trình sản xuất. Nhu cầu trung gian không bao gồm khấu hao tài sản cố định. Khấu hao tài sản cố định là một yếu tố của phần giá trị gia tăng.

2.2.4. Nhu cầu cuối cùng

Hàng hóa và dịch vụ của các ngành sau khi dùng một phần cho nhu cầu trung gian, phần còn lại dùng cho nhu cầu cuối cùng. Bao gồm:

- Tiêu dùng cuối cùng: là loại tiêu dùng nhằm đáp ứng nhu cầu ăn mặc, ở, đi lại.., ký hiệu là: TDCC
- Tích lũy tài sản (đầu tư) bao gồm tích lũy tài sản cố định, hàng tồn kho, tích lũy tài sản quý hiếm, ký hiệu là: TLTS
- Xuất khẩu hàng hóa và dịch vụ, ký hiệu là: XK

2.2.5. Giá trị gia tăng (đầu vào các yếu tố sơ cấp)

Là phần giá trị mới do người lao động tạo ra, sau khi trừ đi nhu cầu trung gian, dùng để chi trả: tiền công người lao động, thuế, nhập khẩu, lợi nhuận.

2.2.6. Các giả thiết cơ bản cho bảng I/O

Đồng nhất về mặt công nghệ: Mỗi ngành chỉ sản xuất một loại sản phẩm duy nhất, và sử dụng các yếu tố đầu vào cũng duy nhất.

Đồng nhất về mặt sản phẩm: Sản phẩm của các ngành không thể thay thế nhau, trong phạm vi từng ngành thì các sản phẩm có thể thay thế hoàn toàn.

Công nghệ tuyến tính và cố định: Quá trình sản xuất được giả thiết là có các định mức kinh tế, kỹ thuật không đổi, và tổng chi phí của mỗi ngành là một hàm tuyến tính của các yếu tố sản xuất.

Hiệu quả dây chuyền: Hiệu quả sản xuất trong một ngành là do hiệu quả sản xuất trong ngành này và hiệu quả của các ngành khác tạo ra.

2.3. Bảng I/O dạng hiện vật

2.3.1. Mô hình I/O dạng hiện vật

Gọi: Q_i : sản lượng của ngành thứ i,

q_{ij} : số lượng sản phẩm ngành j mua từ ngành i,

q_i : sản phẩm cuối cùng của ngành i,

Q_0 : tổng số lao động,

q_{0j} : lượng lao động được sử dụng trong ngành j,

q_0 : số lao động sử dụng trong lĩnh vực khác.

Bảng I/O dạng hiện vật

Số thứ tự	Sản lượng	Sản phẩm trung gian				Sản phẩm cuối cùng
1	Q_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}	q_1
2	Q_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}	q_2
…	…	…	…	…	…	…
n	Q_n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nn}	q_n
	Q_0	q_{01}	q_{02}	…	q_{0n}	q_0

2.3.2. Điều kiện của bảng I/O dạng hiện vật

Điều kiện cân đối về quá trình phân phối sản phẩm:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} + q_i, \quad \forall i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

Điều kiện cân đối về quá trình phân bố lao động xã hội:

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} q_{0j} + q_0, \quad \forall j = \overline{1,n} \quad (2)$$

Từ hệ (1) suy ra $Q_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{q_{ij}}{Q_j}\right)Q_j + q_i, \ \forall i = \overline{1,n}$ (3)

Đặt $\alpha_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}, \forall i, j$ gọi là hệ số chi phí trực tiếp dạng hiện vật. Nó cho biết để có một đơn vị sản phẩm ngành j thì ngành i phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm là α_{ij} đơn vị.

Ta gọi $\alpha = (\alpha_{ij})_{n\times n}$: ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng hiện vật hay còn gọi là ma trận hệ số kỹ thuật.

Từ (3) ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} Q_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 + \cdots + \alpha_{1n}Q_n + q_1 \\ Q_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2 + \cdots + \alpha_{2n}Q_n + q_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Q_n = \alpha_{n1}Q_1 + \alpha_{n2}Q_2 + \cdots + \alpha_{nn}Q_n + q_n \end{cases}$$

Đặt $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ .. \\ Q_n \end{pmatrix}$ là vectơ sản lượng; $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ .. \\ q_n \end{pmatrix}$ là vectơ sản phẩm cuối

Hệ phương trình trên được viết lại như sau

$$(I - \alpha)Q = q \ \ (4) \Leftrightarrow Q = \theta q \quad (5)$$

Trong đó $\theta = (I - \alpha)^{-1} = (\theta_{ij})_{n\times n}$: gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật. Hệ số θ_{ij} cho biết: để sản xuất một đơn vị sản phẩm cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải cung cấp cho ngành j một lượng sản phẩm là θ_{ij}.

Đặt: $\beta_{0j} = \frac{q_{0j}}{Q_j}, \ \forall j$ và $\beta = (\beta_{01}, \beta_{02}, ..., \beta_{0n})$ vectơ hệ số sử dụng lao động.

Hệ số β_{0j}: Hệ số chi phí lao động ngành j, cho biết để tạo ra một đơn vị sản phẩm ngành j, ngành này cần β_{0j} đơn vị lao động.

Ví dụ 10. Cho bảng I/O dạng hiện vật năm t gồm 3 ngành như sau:

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			Sản phẩm cuối cùng
100	20	10	8	62
50	10	10	16	14
40	10	10	8	12
Lao động	10	10	4	

a) Tìm ma trận hệ số kỹ thuật.

b) Giải thích ý nghĩa kinh tế của α_{21}.

c) Tìm vectơ hệ số sử dụng lao động.

Giải

a) Ma trận hệ số kỹ thuật

Tính các hệ số

$$\alpha_{11} = \frac{q_{11}}{Q_1} = \frac{20}{100} = 0,2;\ \alpha_{12} = \frac{q_{12}}{Q_2} = \frac{10}{50} = 0,2;\ \alpha_{13} = \frac{q_{13}}{Q_3} = \frac{8}{40} = 0,2$$

$$\alpha_{21} = \frac{q_{21}}{Q_1} = \frac{10}{100} = 0,1;\ \alpha_{22} = \frac{q_{22}}{Q_2} = \frac{10}{50} = 0,2;\ \alpha_{23} = \frac{q_{23}}{Q_3} = \frac{16}{40} = 0,4$$

$$\alpha_{31} = \frac{q_{31}}{Q_1} = \frac{10}{100} = 0,1;\ \alpha_{32} = \frac{q_{32}}{Q_2} = \frac{10}{50} = 0,2;\ \alpha_{33} = \frac{q_{33}}{Q_3} = \frac{8}{40} = 0,2$$

Ta có

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

b) $\alpha_{21} = 0,1$: cho biết để ngành thứ 1 sản xuất được 1 đơn vị sản phẩm, thì ngành thứ 2 phải cung cấp cho nó 0,1 đơn vị sản phẩm dưới dạng tư liệu sản xuất.

c) Véctơ hệ số sử dụng lao động:

$$\beta_{01} = \frac{q_{01}}{Q_1} = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$\beta_{02} = \frac{q_{02}}{Q_2} = \frac{10}{50} = 0,2$$

$$\beta_{03} = \frac{q_{03}}{Q_3} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$\beta = (0,1; 0,2; 0,1)$$

2.3.3. Xác định giá sản phẩm

Với một nền kinh tế có ma trận hệ số kỹ thuật $\alpha = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, gọi P_j là giá một đơn vị sản phẩm ngành j.

Chi phí nguyên vật liệu: $\sum_{i=1}^{n} P_i.\alpha_{ij}$; $\forall j = \overline{1,n}$.

Giá trị gia tăng tính trên một đơn vị sản phẩm (Chi phí dùng để chi trả cho việc sử dụng các yếu đầu vào sơ cấp) là: w_j

Khi đó ta có phương trình giá của sản phẩm: $P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i.\alpha_{ij} + w_j$

Suy ra hệ phương trình sau

$$\begin{cases} P_1 = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 + \cdots + \alpha_{1n}P_n + w_1 \\ P_2 = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \cdots + \alpha_{2n}p_n + w_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ P_n = \alpha_{n1}P_1 + \alpha_{n2}P_2 + \cdots + \alpha_{nn}P_n + w_n \end{cases}$$

Đặt: $$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}; \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}; \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên được viết dưới dạng ma trận như sau

$$P^T \cdot (I - \alpha) = w^T$$

Như vậy ta có giá sản phẩm của các ngành được xác định là:

$$P^T = w^T \cdot (I-\alpha)^{-1}$$

Giá sẽ được xác định thông qua các yếu tố đầu vào w^T

Nếu ở năm (t + 1) có sự thay đổi của vectơ w, chẳng hạn là sự thay đổi của mức tiền công tính trên 1 sản phẩm của ngành là:

$$\Delta w = w_{t+1} - w_t$$

Khi đó mức thay đổi giá sẽ là

$$\Delta P^T = \Delta w^T \cdot (I-\alpha)^{-1}$$

Ví dụ 11. Với các ngành được cho như trong ví dụ 10, cho

$$W_t^T = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,15 \end{pmatrix} \text{ và } W_{t+1}^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}$$

a) Hãy tìm ma trận chi phí toàn bộ và giải thích ý nghĩa của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3.

b) Xác định vectơ giá sản phẩm của ngành vào năm t.

c) Xác định mức giá thay đổi vào của năm (t + 1) so với năm t?

Giải

a) Ma trận hệ số chi phí toàn bộ

$$(I-\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,386 & 0,495 & 0,594 \\ 0,297 & 1,535 & 0,842 \\ 0,248 & 0,446 & 1,535 \end{pmatrix}$$

$\theta_{23} = 0,842$ có ý nghĩa: Để tạo ra 1 đơn vị sản phẩm cuối cùng ngành 3 thì ngành 2 phải cung cấp $\theta_{23} = 0,842$ đơn vị sản phẩm.

b) Vectơ giá sản phẩm của các ngành vào năm t sẽ là:

$$P^T = w_t^T \cdot (I-\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,386 & 0,495 & 0,594 \\ 0,297 & 1,535 & 0,842 \\ 0,248 & 0,446 & 1,535 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^T = \begin{pmatrix} 0,136 & 0,245 & 0,344 \end{pmatrix}$$

c) Mức thay đổi các yếu tố đầu vào sơ cấp:

$$\Delta w^T = w_{t+1}^T - w_t^T = \begin{pmatrix} 0,05 & -0,05 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Mức thay đổi giá sản phẩm của các ngành sẽ là:

$$\Delta P^T = \Delta w^T.(I-\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix}0,05 & -0,05 & 0,15\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1,386 & 0,495 & 0,594\\ 0,297 & 1,535 & 0,842\\ 0,248 & 0,446 & 1,535\end{pmatrix}$$

$$\Delta P^T = \begin{pmatrix}0,092 & 0,015 & 0,218\end{pmatrix}$$

2.4. Bảng I/O dạng giá trị

2.4.1. Mô hình I/O dạng giá trị

Các ngành	Giá trị sản xuất	Nhu cầu trung gian	Tổng	Nhu cầu cuối cùng				Tổng
				Tiêu dùng	Tích lũy tài sản	Xuất khẩu	Nhập khẩu	
1 2 ⋮ n	X_1 X_2 ⋮ X_n	$x_{11}\quad x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}$ $x_{21}\quad x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}$ $\vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots$ $x_{n1}\quad x_{n2}\quad \cdots\quad x_{nn}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$ ⋮ $\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	f_{11} f_{21} ⋮ f_{n1}	f_{12} f_{22} ⋮ f_{n2}	f_{13} f_{23} ⋮ f_{n3}	$-f_{14}$ $-f_{24}$ ⋮ $-f_{n4}$	x_1 x_2 ⋮ x_n
Các yếu tố đầu vào sơ cấp	Tổng	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\quad \cdots\quad \sum_{i=1}^{n} x_{in}$	Tổng	f_1	f_2	f_3	$-f_4$	Tổng
Lao động	Y_1	$y_{11}\quad y_{12}\quad \cdots\quad y_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$					
Khấu hao	Y_2	$y_{21}\quad y_{22}\quad \cdots\quad y_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{2j}$					
Thuế	Y_3	$y_{31}\quad y_{32}\quad \cdots\quad y_{3n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{3j}$					
Lợi nhuận	Y_4	$y_{41}\quad y_{42}\quad \cdots\quad y_{4n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{4j}$					
Tổng	$Y_1 + ... + Y_4$	$\sum_{i=1}^{4} y_{i1}\quad \cdots\quad \sum_{i=1}^{4} y_{in}$						
GTSX	$X_1 + ... + X_n$	$X_1 \cdots\cdots\cdots\cdots X_n$						

Trong đó

X_i : Giá trị sản xuất của ngành thứ i

x_{ij} : Giá trị sản phẩm mà ngành j mua từ ngành i

x_i : Giá trị sử dụng cuối cùng của ngành i

f_{ik} : Giá trị sử dụng cuối cùng của ngành i dùng cho mục đích tiêu dùng thứ k

Y_h : Giá trị yếu tố đầu vào sơ cấp thứ h

y_{hj} : Giá trị yếu tố đầu vào sơ cấp thứ h được sử dụng trong ngành j

Phương trình phân phối giá trị sản phẩm:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} - f_{i4} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i$$

Giá trị sản xuất = Chi phí trung gian + Tiêu dùng cuối cùng +

+ Đầu tư +Xuất khẩu - Nhập khẩu.

Phương trình hình thành cơ cấu giá trị sản phẩm:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{h=1}^{4} y_{hj}$$

Bảng I/O cho ta biết quá trình hình thành giá trị sản phẩm:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{4} y_{hj}$$

$$GDP = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tổng giá trị nhu cầu cuối cùng bằng GDP tính theo phương pháp sử dụng sản phẩm

Có những bảng vào ra dạng giá trị tách riêng sản phẩm nhập khẩu: Với bảng vào ra này ta giả sử nền kinh tế nhập khẩu không cạnh tranh, tức là các sản phẩm trong nước đã sản xuất thì không nhập khẩu nữa.

ngành	Giá trị sản xuất	Nhu cầu trung gian	Tổng	Nhu cầu cuối cùng			Tổng
				Tiêu dùng	Tích lũy TS	Xuất khẩu	
1 2 ⋮ n	X_1 X_2 ⋮ X_n	$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{matrix}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$ ⋮ $\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	f_{11} f_{21} ⋮ f_{n1}	f_{12} f_{22} ⋮ f_{n2}	f_{13} f_{23} ⋮ f_{n3}	x_1 x_2 ⋮ x_n
Các yếu tố đầu vào sc	Tổng	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} x_{in}$	Tổng	f_1	f_2	f_3	Tổng
Nhập khẩu	Y_1	$y_{11} \quad y_{12} \quad \cdots \quad y_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$				
Lao động	Y_2	$y_{21} \quad y_{22} \quad \cdots \quad y_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{2j}$				
Khấu hao	Y_3	$y_{31} \quad y_{32} \quad \cdots \quad y_{3n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{3j}$				
Thuế	Y_4	$y_{41} \quad y_{42} \quad \cdots \quad y_{4n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{4j}$				
Lợi nhuận	Y_5	$y_{51} \quad y_{52} \quad \cdots \quad y_{5n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{5j}$				
Tổng	$Y_1 + ... + Y_5$	$\sum_{i=1}^{5} y_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{5} y_{in}$		Z_1	Z_2	Z_3	
Giá trị SX	$X_1 + ... + X_n$	$X_1 \cdots\cdots\cdots X_n$		V_1	V_2	V_3	

Bảng I/O gộp của Việt Nam, 1989, theo giá sản xuất:

	Nhu cầu trung gian						∑	Nhu cầu cuối cùng				∑
	1	2	3	4	5	6		C	I	E	∑	
CN	6036	1635	1184	566	491	1434	11346	6457	739	3429	10625	21971
NN,LN	939	2949	26	83	4	69	4070	8406	193	2168	10767	14837
XDCB	62	22	2	43	1	85	215	313	1698	66	2077	2292
TN,VT	301	78	53	21	95	62	610	2623	143	674	3440	4050
GT,BĐ	151	57	86	23	8	73	398	625	44	160	829	1227
DV	333	75	58	311	17	656	1450	5934	0	202	6136	7586
∑	7822	4816	1409	1047	616	2379	18089	24358	2817	6699	33874	51963
N.Khẩu	9337	208	0	0	8	14	9567	0	0	0	0	9567
K. hao	2601	7081	720	1121	292	2621	14436	0	0	0	0	14436
T.lương	613	236	50	152	126	1621	2798	0	0	0	0	2798
L.nhuận	1598	2496	113	1730	185	951	7073	0	0	0	0	7073
∑	14149	10021	883	3003	611	5207	33874	0	0	0	0	33874
Tổng	21974	14837	2292	4050	1227	7586	51963	24358	2817	6699	33874	85837

Ví dụ 12: Cho bảng cân đối liên ngành:

Giá trị TSL	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
420	84	0	120	
	42	130	80	398
800	63	65		512
Nhập khẩu	42	65	40	
Lương		65	40	
Khấu hao	42	130		
Thuế	42	65	80	
Lợi nhuận	84		200	

Hãy điền số thích hợp vào bảng cân đối liên ngành

Giải: Bảng cân đối liên ngành sẽ là:

Giá trị TSL	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
420	84	0	120	216
650	42	130	80	398
800	63	65	160	512
Nhập khẩu	42	65	40	
Lương	21	65	40	
Khấu hao	42	130	160	
Thuế	42	65	80	
Lợi nhuận	84	130	200	

2.4.2. Hệ số

a) Hệ số chi phí trực tiếp và hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \qquad \forall i, j$$

Hệ số này cho biết để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành j thì ngành i phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là a_{ij}.

Phương trình phân phối giá trị sản phẩm:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j + x_i \qquad i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + x_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + x_2 \\ \vdots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n + x_n \end{cases}$$

Đặt $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ...... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ...... & a_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị.

Suy ra

$$(I - A)X = x \Leftrightarrow X = Cx$$

Trong đó $C = (I - A)^{-1} = (c_{ij})_{n\times n}$, và gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị. Hệ số c_{ij} cho biết: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

b) Hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp:

Đặt: $b_{hj} = \dfrac{y_{hj}}{X_j} \quad \forall\ j = \overline{1, n};\ h = \overline{1, 5}$

$B = (b_{ij})_{5\times n}$: Được gọi là ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp

b_{hj}: cho biết để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành j thì ngành này phải sử dụng trực tiếp b_{hj} đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ h.

$$Y_h = \sum_{j=1}^{n} b_{hj}.X_j \qquad \forall h = \overline{1, 5}$$

hay: $Y = BX$

với $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ b_{41} & b_{42} & \cdots & b_{4n} \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{5n} \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix}$

c) Ma trận hệ số nhu cầu cuối cùng:

Nhu cầu cuối cùng: $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ xét: $d_{ik} = \dfrac{f_{ik}}{V_k} \quad \forall\ i = \overline{1, n};\quad k = 1, 2, 3$

d_{ik}: Trong 1 đơn vị giá trị tiêu dùng của nhu cầu V_k có d_{ik} giá trị của ngành i.

$D = (d_{ik})_{n\times3}$: Ma trận cơ cấu nhu cầu cuối cùng

$$X = AX + DV$$

Hay: $(I - A)X = DV$

Ví dụ 13: Cho bảng cân đối liên ngành như ví dụ 12

a) Tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị, ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp. Giải thích ý nghĩa của a_{13} và b_{42}?

b) Giả sử vào thời kỳ kế hoạch các định mức kinh tế, kĩ thuật không đổi. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t + 1) với x_{t+1} = (300; 500; 700)

Giải

a) Hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{84}{420} = 0,2; a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{0}{650} = 0; a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{120}{800} = 0,15$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{42}{420} = 0,1; a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{130}{650} = 0,2; a_{23} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{80}{800} = 0,1$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{63}{420} = 0,15; a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{65}{650} = 0,1; a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{160}{800} = 0,2$$

Ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,15 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp :

$$b_{11} = \frac{y_{11}}{X_1} = \frac{42}{420} = 0,1; b_{12} = \frac{y_{12}}{X_2} = \frac{65}{650} = 0,1; b_{13} = \frac{y_{13}}{X_3} = \frac{40}{800} = 0,05$$

$$b_{21} = \frac{y_{21}}{X_1} = \frac{21}{420} = 0,05; b_{22} = \frac{y_{22}}{X_2} = \frac{65}{650} = 0,1; a_{23} = \frac{y_{23}}{X_3} = \frac{40}{800} = 0,05$$

$$b_{31} = \frac{y_{31}}{X_1} = \frac{42}{420} = 0,1; b_{32} = \frac{y_{32}}{X_2} = \frac{130}{650} = 0,2; b_{33} = \frac{y_{33}}{X_3} = \frac{160}{800} = 0,2$$

$$b_{41} = \frac{y_{41}}{X_1} = \frac{42}{420} = 0,1; b_{42} = \frac{y_{42}}{X_2} = \frac{65}{650} = 0,1; b_{33} = \frac{y_{43}}{X_3} = \frac{80}{800} = 0,1$$

$$b_{51} = \frac{y_{51}}{X_1} = \frac{84}{420} = 0,2; b_{52} = \frac{y_{52}}{X_2} = \frac{130}{650} = 0,2; b_{53} = \frac{y_{53}}{X_3} = \frac{200}{800} = 0,25$$

Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp:

$$B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}$$

b) Giá trị tổng sản lượng vào năm (t + 1) sẽ là:

$$X_{t+1} = (I - A)^{-1}.x_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,15 \\ -0,1 & 0,8 & -0,1 \\ -0,15 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 579 \\ 833 \\ 1087 \end{pmatrix}$$

$$x_{ij}(t+1) = a_{ij} \cdot X_j(t+1); y_{hj}(t+1) = b_{hj} \cdot X_j(t+1)$$

Từ đây ta suy ra bảng cân đối liên ngành sẽ là:

Giá trị TSL	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
579	115,8	0	163,2	300
833	57,9	166,6	108,5	500
1087	86,85	83,3	216,85	700
Nhập khẩu	57,9	83,3	54,35	
Lương	28,95	83,3	54,3	
Khấu hao	57,9	166,6	217,4	
Thuế	57,9	83,3	108,7	
Lợi nhuận	115,8	166,6	163,05	

2.4.3. Xác định chỉ số giá

Nếu giá 1 đơn vị sản phẩm ngành j thời điểm t là $P_j(t)$ và thời điểm (t+1) là $P_j(t + 1)$ thì chỉ số giá sản phẩm này sẽ là:

$$k_j(t+1) = \frac{P_j(t+1)}{P_j(t)}$$

Để đơn giản người ta kí hiệu chỉ số giá là: k_j

Tương tự chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp kí hiệu là: w_i

Do nguồn hình thành bằng nguồn phân phối nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} b_{hj} = 1$$

Khi đó: $\sum_{i=1}^{n} k_i . a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} w_h . b_{hj}$ là giá trị năm (t+1) để tạo ra cùng một lượng sản phẩm với một đơn vị giá trị năm t.

Gọi m là số sản phẩm ứng với một đơn vị giá trị năm t.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} w_h . b_{hj} = P = \frac{P/m}{1/m} = \frac{P_j(t+1)}{P_j(t)} = k_j$$

Khi đó viết dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{aligned} & K = A^T \cdot K + B^T \cdot w \\ & \Leftrightarrow (I - A^T) \cdot K = B^T \cdot w \\ & \Leftrightarrow K^T \cdot (I - A) = w^T \cdot B \\ & \Leftrightarrow K^T = w^T \cdot B \cdot (I - A)^{-1} \end{aligned}$$

Công thức trên cho phép xác định chỉ số giá sản phẩm của ngành khi biết chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp.

Nếu các yếu tố đầu vào sơ cấp thay đổi thì sự thay đổi của chỉ số giá sẽ là:

$$\Delta K^T = \Delta w^T \cdot B \cdot (I - A)^{-1}$$

Ví dụ 14: Cho bảng cân đối liên ngành như trong ví dụ trên và cho chỉ số giá các yếu tố đầu vào năm (t + 1) là: $w^T = \begin{pmatrix} 1,01 & 1,05 & 1,2 & 1,1 & 1,2 \end{pmatrix}$. Hãy xác định chỉ số giá của các sản phẩm được sản xuất.

Giải

Theo công thức ta có chỉ số giá của các ngành sẽ là:

$$K^T = w^T.B.(I - A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,01 & 1,05 & 1,2 & 1,1 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & -0,15 \\ -0,1 & 0,8 & -0,1 \\ -0,15 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,137 & 1,138 & 1,147 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP

1. Cho biết hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 100\sqrt[5]{L^3}$, $L > 0$ và giá của sản phẩm là $P = 5$ USD, giá thuê lao động là $P_L = 3$ USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $L = 100000$.

2. Cho biết hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 130Q^2 + 12Q;\ Q > 0$. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q = 65$.

3. Cho biết hàm chi phí là $TC(Q) = Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2;\ Q > 0$ và hàm cầu $Q = 90 - 2P$. Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q = 4$.

4. Cho biết hàm chi phí là $TC(Q) = 4Q^3 + 5Q^2 + 500;\ Q > 0$ và hàm cầu $Q = 11160 - P$. Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q = 30$.

5. Một công ty có hàm cầu về sản phẩm và hàm tổng chi phí là:

$$P = 2750 - \frac{45}{8}Q \quad TC = \frac{Q^3}{30} - 15Q^2 + 2500Q$$ (trong đó P là giá và Q là sản lượng).

a) Tính sản lượng và giá bán để tối đa hóa lợi nhuận? Tính và nêu ý nghĩa hệ số co giãn của cầu sản phẩm tại mức giá và sản lượng tối ưu?

b) Tìm giá bán để tối đa hóa sản lượng bán ra mà công ty không bị lỗ?

6. Một công ty cạnh tranh hoàn hảo có thể sản xuất và cung ứng cho thị trường hai loại mặt hàng với hàm tổng chi phí kết hợp là $TC = 2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 3Q_2^2$

a) Cho biết giá các mặt hàng là $P_1=20$, $P_2=30$. Hãy xác định mức sản lượng và lợi nhuận tối ưu.

b) Tại thời điểm tối ưu nếu tăng sản lượng mặt hàng loại một thêm 5%, tăng sản lượng mặt hàng loại hai thêm 8% thì chi phí biến động như thế nào?

7. Người ta ước lượng hàm sản xuất hằng ngày của một doanh nghiệp như sau : $Q = 80\sqrt{K}\sqrt[3]{L}$

a) Với $K = 25, L = 64$. Hãy cho biết mức sản xuất hằng ngày của doanh nghiệp

b) Bằng các đạo hàm riêng của Q, cho biết nếu doanh nghiệp

- Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên mức $K = 25$ thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?

- Sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên mức $L = 64$ thì sản lượng thay đổi bao nhiêu?

c) Nếu giá thuê một đơn vị tư bản $K = 12$ và giá đơn vị lao động $L = 2,5$ và doanh nghiệp sử dụng yếu tố đầu vào ở mức nêu trong câu a) thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm một đơn vị K hay L.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $Q = 1600$; b) Tính $\frac{\partial Q}{\partial L}; \frac{\partial Q}{\partial K}$; c)

8. Cho hàm lợi ích $TU = 3xy - 2x^2 - y^2;\ x, y > 0$

a) Tại $x_0 = 50, y_0 = 60$, nếu x tăng thêm một đơn vị và y không đổi, hỏi lợi ích thay đổi như thế nào?

b) Tính MU_y tại $x_0 = 50, y_0 = 60$, giải thích ý nghĩa.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $MU_x = -20$; b) $MU_y = 30$.

9. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là

$$Q_1 = 1300 - P_1;\ Q_2 = 675 - 0,5P_2$$

và hàm chi phí kết hợp là $TC = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 250,\ Q_2 = 100$.

10. Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm như sau:

$$\pi = 160Q_1 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 120Q_2 - 18$$

Hãy tìm Q_1, Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 20,\ Q_2 = 20$.

11. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là

$$Q_1 = 25 - 0,5P_1;\ Q_2 = 30 - P_2$$

Và hàm chi phí kết hợp là $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 7,\ Q_2 = 4.$

12. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là

$$Q_1 = 50 - 0,5P_1;\ Q_2 = 76 - P_2$$

Và hàm chi phí kết hợp là $TC=3Q_1^2+2Q_1Q_2+2Q_2^2+55$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 8,\ Q_2 = 10.$

13. Cho hàm sản xuất của hãng $Q = 10K^{0,3}L^{0,4}$, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $L = 51200,\ K = 2560000.$

14. Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm lợi nhuận của doanh nghiệp

$$\pi = 15Q_1 + 12Q_2 - 3Q_1Q_2^2 - Q_1^3$$

Hãy tìm Q_1, Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 1,\ Q_2 = 2$ hay $Q_1 = 2,\ Q_2 = 1.$

15. Doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất

$$Q = -2K^2 + 3KL - 3L^2 + 30K + 20L;\ K, L > 0$$

a) Hãy xác định mức sử dụng K, L để doanh nghiệp thu được mức sản lượng cực đại.

b) Biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 4, giá thuê một đơn vị lao động bằng 22, giá sản phẩm bằng 2. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $K = 16,\ L = \frac{34}{3}$; b) $K = 13,\ L = 8$.

16. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 300 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$. Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q = 11.$

17. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2640 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^2 + 1000Q + 100$. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Hướng dẫn: Đáp số: $t = 820$.

18. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 1800 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 = 500$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Hướng dẫn: Đáp số: $t = 250$.

19. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 20$ và $Q_D = 400 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 = 310$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sàn phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Hướng dẫn: Đáp số: $t = 50$

20. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá hai loại sản phẩm trên thị trường là $P_1 = 60$ và $P_2 = 75$. Hàm tổng chi phí là : $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 15, Q_2 = 30$.

21. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là :

$$Q_{D_1} = 40 - 2P_1 + P_2 \text{ và } Q_{D_2} = 15 + P_1 - P_2.$$

Với hàm tổng chi phí là : $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Hướng dẫn: Đáp số: $Q_1 = 15, Q_2 = 30$.

22. Một người muốn dùng số tiền 178000000 đồng để mua hai mặt hàng có đơn giá $P_1 = 400000$ đồng và $P_2 = 600000$ đồng. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $TU = (x_1 + 20)(x_2 + 10)$ $(x_1, x_2$ lần lượt là số lượng của hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai loại mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

Hướng dẫn: Đáp số: $x_1 = 220, x_2 = 150$.

23. Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
300	60	24	80	136
240	30	48	40	122
400	90	24	120	166
Lao động	30	36	40	Năm (t+1)

a) Hãy xác định các hệ số kỹ thuật và hệ số sử dụng lao động.

b) Biết $q(t+1) = (150,140,180)$ và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

c) Xác định vectơ giá trị sản phẩm được sản xuất ra. Biết giá trị gia tăng của các ngành là $w^T = (0,05;0,1;0,15)$.

Hướng dẫn: Đáp số:

$$\text{a) } \alpha = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } Q(t+1) = \left(I - \alpha(t+1)\right)^{-1} q(t+1);\ q_{ij} = \alpha_{ij}Q_j;\ q_{0j} = \beta_{0j}Q_j,$$

$$\text{c) } P^T = w^T\left(I - \alpha(t+1)\right)^{-1}.$$

24. Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
210	42	36	66	
	0	36	22	122
220		18	22	96
Lao động	42	18	66	Năm $(t+1)$

a) Hãy tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.

b) Hãy xác định ma trận hệ số kỹ thuật và vectơ sử dụng lao động năm t.

c) Nếu biết $\alpha_{31}(t+1)=\frac{1}{2}\alpha_{31}(t)$ còn các hệ số khác không đổi và $q(t+1)=\left(70,130,100\right)$. Lập bảng cân đối liên ngành năm $(t+1)$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $q_1=66,\ Q_2=180,\ \alpha_{31}=84$,

$$\text{b) } \alpha=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0,3\\ 0 & 0,2 & 0,1\\ 0,4 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix};\ \beta=\left(0,2 \quad 0,1 \quad 0,3\right),$$

$$\text{c) } Q(t+1)=\left(I-\alpha(t+1)\right)^{-1}q(t+1);\ q_{ij}=\alpha_{ij}Q_j;\ q_{0j}=\beta_{0j}Q_j.$$

25. Cho ma trận hệ số kỹ thuật của năm t của 3 ngành dạng hiện vật:

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0\\ 0,2 & 0,1 & 0,3\\ 0,2 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix}$$

và vectơ sử dụng lao động năm t : $\beta(t)=\left(0,1;0,2;0,15\right)$.

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở cùng cột 3 của ma trận này.

b) Biết $q(t+1)=\left(60,50,70\right)$ và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm $(t+1)$.

c) Hãy xác định vectơ giá trị sản phẩm các ngành, biết phần giá trị gia tăng của các ngành là $w^T=\left(0,05;0,1;0,15\right)$.

Hướng dẫn: Đáp số:

a) $\theta = [I - \alpha(t)]^{-1}$,

b) $Q(t+1) = (I - \alpha(t+1))^{-1} q(t+1); \; q_{ij} = \alpha_{ij} Q_j; \; q_{0j} = \beta_{0j} Q_j$,

c) $P^T = w^T (I - \alpha(t+1))^{-1}$.

26. Cho bảng cân đối liên ngành năm t của 3 ngành:

Ngành	Sản phẩm	Sản phẩm trung gian			SPCC
		1	2	3	
1	2500	250	360	400	1490
2	1800	500	180	400	720
3	2000	750	360	200	690
	Lao động	1000	900	1000	

a) Tìm ma trận hệ số kỹ thuật năm t, giải thích ý nghĩa hệ số α_{32}.

b) Nếu năm $(t+1)$ nhu cầu về sản phẩm cuối cùng của các ngành là: $(540, 250, 300)$ đơn vị tỷ VNĐ. Lập bảng cân đối liên ngành cho năm $(t+1)$, biết $\alpha(t+1) = \alpha(t)$.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $\alpha = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$

b) $Q(t+1) = (I - \alpha(t+1))^{-1} q(t+1); \; q_{ij} = \alpha_{ij} Q_j; \; q_{0j} = \beta_{0j} Q_j$

27. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t.

b) Biết $x(t) = (800, 1500, 700)$, tìm sản lượng mỗi ngành năm t.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $C = [I - A(t)]^{-1}$; b) $X(t) = [I - A(t)]^{-1} x(t)$

28. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.

b) Năm $(t+1)$ nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là $(180,150,100)$(tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm $(t+1)$ và năm t như sau.

Hướng dẫn: Đáp số: a) $C = [I - A(t)]^{-1}$; b) $X(t+1) = [I - A(t+1)]^{-1} x(t+1)$.

29. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t

Giá trị Tổng sản lượng	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị sản phẩm cuối cùng
600	120	90	56	
450	60	45	112	
560	90	22,5	168	
Nhập khẩu	30	45	84	
Lương	60	67,5	28	
Khấu hao	60	45	28	
Thuế	60	45	28	
Lợi nhuận	120	90	56	

a) Tìm các giá tri còn thiếu trong bảng.

b) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3.

c) Tìm ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.

d) Giả sử các hệ số năm (t+1) không đổi so với năm t, và véctơ sản phẩm cuối cùng năm (t+1) là x(t+1)=(500100 400). Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

30. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t

Giá trị Tổng sản lượng	Giá trị sản phẩm trao đổi trung gian			Giá trị sản phẩm cuối cùng
1450	290	0	450	
1990	145	199	150	
1500	290	398	150	
Nhập khẩu	72,5	398	150	
Lương	145	298,5	150	
Khấu hao	145	99,5		
Thuế	72,5	199	150	
Lợi nhuận	290	398	225	

a)Tìm các giá tri còn thiếu trong bảng.

b)Tính ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3.

c) Tính ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp năm t, cho biết ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở dòng 1 cột 3.

d) Giả sử các hệ số năm (t+1) không đổi so với năm t, và vec tơ sản phẩm cuối cùng năm (t+1) là x(t+1)=(1000 1500 800). Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

31. Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp và chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1.518 & 0.47 & 0.741 \\ 0.759 & 1.664 & 1.085 \\ 0.506 & 0.633 & 2.152 \end{pmatrix}$$

a) Hãy giải thích ý nghĩa của tổng các phần tử nằm trên cột 3 của ma trận A.

b) Cho biết sang năm (t+1) các ma trận hệ số kĩ thuật không thay đổi, nếu mục tiêu giá trị sản phẩm dành cho nhu cầu cuối cùng ngành thứ nhất, thứ 2, thứ 3 lần lượt tăng 15; 10; 12 đơn vị giá trị thì giá trị sản lượng các ngành cần tăng thêm bao nhiêu đơn vị giá trị để đáp ứng mục tiêu đó?

Hướng dẫn: a) Ý nghĩa số 0.75

$$\text{b)}\ \Delta X = C.\Delta x = \begin{pmatrix} 1.518 & 0.47 & 0.741 \\ 0.759 & 1.664 & 1.085 \\ 0.506 & 0.633 & 2.152 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.362 \\ 41.045 \\ 39.744 \end{pmatrix}$$

32. Cho bảng cân đối liên ngành năm t như sau:

Giá trị	Giá trị SP trao đổi trung gian			Giá trị SP cuối cùng
250	50	35	30	$\mathbf{x_1}$
180	$\mathbf{x_{21}}$	25	35	95
150	40	25	30	55
Nhập khẩu	10	$\mathbf{y_{12}}$	5	
Tiền lương	30	15	20	
Khấu hao	$\mathbf{y_{31}}$	10	5	
Thuế	20	10	10	
Lợi nhuận	65	50	15	

a) Hãy tìm các số liệu còn thiếu trong bảng trên và tính ma trận hệ số kỹ thuật, giải thích ý nghĩa kinh tế của a_{32}.

b) Cho x(t+1) = (180, 120, 80), các hệ số khác không đổi. Hãy lập kế hoạch giá trị sản phẩm trao đổi năm (t+1).

Hướng dẫn: $x_1 = 135$, $x_{21} = 25$, $y_{31} = 10$, $y_{12}=10$

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,194 & 0,2 \\ 0,1 & 0,139 & 0,23 \\ 0,16 & 0,139 & 0,2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1,39 & 0,387 & 0,459 \\ 0,247 & 1,287 & 0,432 \\ 0,321 & 0,301 & 1,417 \end{pmatrix}$$

33. Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:

$$B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,1 \\ 0,15 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1,302 & 0,245 & 0,33 \\ 0,538 & 1,406 & 0,354 \\ 0,264 & 0,34 & 1,226 \end{pmatrix}$$

a) Cho giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (3.000; 2.800; 4.000). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị của các ngành?

b) Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3; 4; 8). Trong năm (t + 1) theo dự báo thì chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp là (1,05; 1,1; 1,2; 1,15), tính giá 1 đơn vị sản phẩm các ngành năm (t + 1)?

Hương dẫn : a) $A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; x = (E - A).X = \begin{pmatrix} 1470 \\ 740 \\ 2740 \end{pmatrix}$

b) $K^T = w^T.B.C = [1{,}125 \quad 1{,}123 \quad 1{,}118]$

34. Ma trận hệ số chi phí trực tiếp A, ma trận hệ số yếu tố đầu vào sơ cấp B dạng giá trị năm t:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

a) Cho giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (1500; 2500; 3200). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị của các ngành năm t?

b) Giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (2; 3; 5). Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật năm t và nêu ý nghĩa của phần tử nằm ở dòng 2 cột 3 ma trận đó?

Hướng dẫn: a) $x = (E - A).X = \begin{pmatrix} 225 \\ 1380 \\ 2320 \end{pmatrix}$ b) $\alpha_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} = \frac{q_{ij} \cdot p_i}{Q_j.p_j}.\frac{p_j}{p_i} = a_{ij}.\frac{p_j}{p_i}$

35. Ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp B, ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1{,}175 & 0{,}292 & 0{,}275 \\ 0{,}213 & 1{,}188 & 0{,}263 \\ 0{,}1 & 0{,}167 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

a) Biết giá trị sản xuất của các ngành lần lượt là (5.000; 3.000; 6.500). Lập bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t?

b) Trong năm (t + 1) các yếu tố kĩ thuật, kinh tế không đổi. Biết chỉ số giá của các yếu tố đầu vào sơ cấp của các ngành được dự báo lần lượt là (1,5; 1,2; 1,1; 2) và giá một đơn vị sản phẩm của các ngành năm t lần lượt là (3; 4,5; 2). Hãy tính sự biến động giá của năm (t + 1) so với năm t?

Hướng dẫn: a) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; x = (E - A).X = \begin{pmatrix} 2925 \\ 975 \\ 4650 \end{pmatrix}$

b) $K^T = w^T.B.C = [1{,}481 \quad 1{,}385 \quad 1{,}406]$