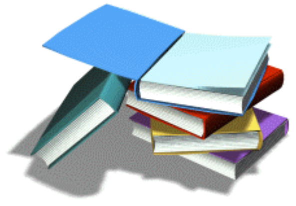
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING
KHOA CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN – THỐNG KÊ

BÀI GIẢNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN

Giảng viên
ThS. Lê Trường Giang



Chương 2

BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất

1. Biến ngẫu nhiên
2. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên
4. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

1. Biến ngẫu nhiên

a. Định nghĩa

Xét một phép thử trong không gian mẫu Ω. Hàm X được xác định

$$\begin{aligned} X:\ & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

được gọi là biến ngẫu nhiên.

(BNN là một số được gán cho từng kết quả của phép thử)

Kí hiệu biến ngẫu nhiên bởi các chữ cái in hoa *X, Y, Z*,...

Miền giá trị của hàm *X* kí hiệu là Im*(X)*

$$\operatorname{Im}(X) = \{x \in \mathbb{R}:\ \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}.$$

Với $a \in \operatorname{Im}(X)$, tập $\{\omega:\ X(\omega) = a\}$ là một sự kiện ngẫu nhiên

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất

1. Biến ngẫu nhiên

a. Định nghĩa

Ví dụ 1. Xét phép thử Bernoulli, trong phép thử này chỉ có hai kết quả "thành công" kí hiệu là T và "thất bại" kí hiệu là $\bar{T}$.

Xác định một quy tắc X như sau: $X(T)=1, X(\bar{T})=0,$

Khi đó X là một biến ngẫu nhiên và Im(X) = {0,1}

Cho xác suất thành công là $P(T)=q$, xác suất thất bại là $P(\bar{T})=1-q$.

$$P(X=1)=P(\{\omega\colon \mathrm{X}(\omega)=1\})=P(T)=q\text{, tương tự } P(X=0)=1-q.$$

1. Biến ngẫu nhiên

b. Phân loại

Định nghĩa. BNN X thuộc loại *rời rạc* nếu Im(X) là tập hữu hạn hay vô hạn đếm được.

Ví dụ 2.Thực hiện dãy phép thử Bernoulli, gọi X là BNN chỉ số lần thực hiện phép thử cho đến khi xuất hiện lần thành công đầu tiên. Trong ví dụ này Im(X) = {1, 2, 3, …}, dó đó X là BNN rời rạc.

$$P\left(X=k\right)=q.\left(1-q\right)^{k-1},\ k=1,2,\ldots$$

Định nghĩa. BNN X là *liên tục* nếu Im(X) là một khoảng hay đoạn số thực, và là tập vô hạn không đếm được.

Ví dụ 3. BNN X chỉ thời gian xuất hiện hư hỏng lần đầu tiên của một chiếc máy điện thoại. Khi đó, BNN X thuộc loại liên tục

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất

1. Biến ngẫu nhiên

c. Chú ý

BNN coi như được xác định nếu như ta biết được 2 yếu tố sau:

- Tập các giá trị của BNN,
- Các xác suất mà BNN nhận giá trị thuộc tập đó.

2. Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

+ Luật phân phối xác suất của BNN là một biểu đồ, trong đó chỉ ra

- Các giá trị có thể nhận được của BNN,
- Xác suất tương ứng để BNN nhận các giá trị đó.

+ Luật phân phối xác suất thường được thể hiện dưới hai hình thức: hàm mật độ xác suất và hàm phân phối xác suất.

3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên

a. Biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa. BNN X rời rạc, $\mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ứng với mỗi giá trị của X là một xác suất

$$\boxed{f_X(x) = P(X = x),\ \forall x \in \mathrm{Im}(X).}$$

Hàm f_X được gọi là hàm mật độ xác suất của BNN X .

Hàm mật độ xác suất thỏa mãn các điều kiện sau

i, $f_X(x) > 0,\ \forall x \in \mathrm{Im}(X).$

ii, $\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} f_X(x) = 1.$

3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên

BNN X có hữu hạn giá trị, $\mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Bảng phân phối xác suất của X dạng như sau

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$p_i = f_X\left(x_i\right) = P\left(X = x_i\right).$$

Tập $\boxed{A \subset \mathrm{Im}\left(X\right), P\left(X \in A\right) = \sum_{x \in A} f\left(x\right)}$.

Ví dụ 6. Lô hàng có 20 sản phẩm giống nhau, có 5 sản phẩm kém chất lượng. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X chỉ số sản phẩm kém chất lượng và tính xác suất $P\left(X < 2\right)$.

3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 6B. Một xạ thủ có 4 viên đạn, bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,7. Nếu có 1 viên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì dừng. Gọi X là số viên đạn đã bắn.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X ?

b) Tính $P(2 \le X < 4)$?

3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên

a. Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa. BNN X liên tục, với hai giá trị thực $a \le b$, xác suất của sự kiện $\{a \le X \le b\}$ là $P(a \le X \le b)$. Giả sử một hàm f không âm, thỏa

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Hàm f như trên được gọi là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên *X*.

Hàm mật độ xác suất thỏa mãn các điều kiện sau

$i.\ f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ $\qquad ii.\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Ngược lại, f thỏa đồng thời *i* và *ii* thì f là hàm mật độ xác suất.

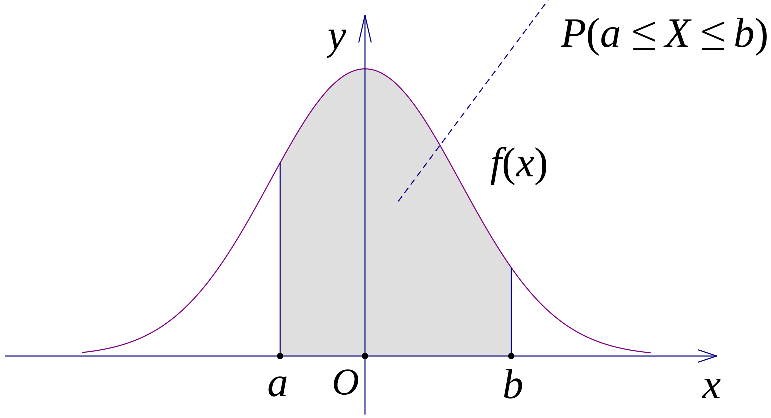
3. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên

BNN X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $P(X=a)=0,\ \forall a\in\mathbb{R}.$

Suy ra $P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b).$

Xác suất $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)\,dx$

là miền diện tích tô đen



Ví dụ 7. Cho X là BNN có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{nếu } x\in[0,1] \\ 0 & \text{nếu } x\notin[0,1]. \end{cases}$$

a. Xác định a?

b. Tính $P(0,25<X\le 0,5)$?

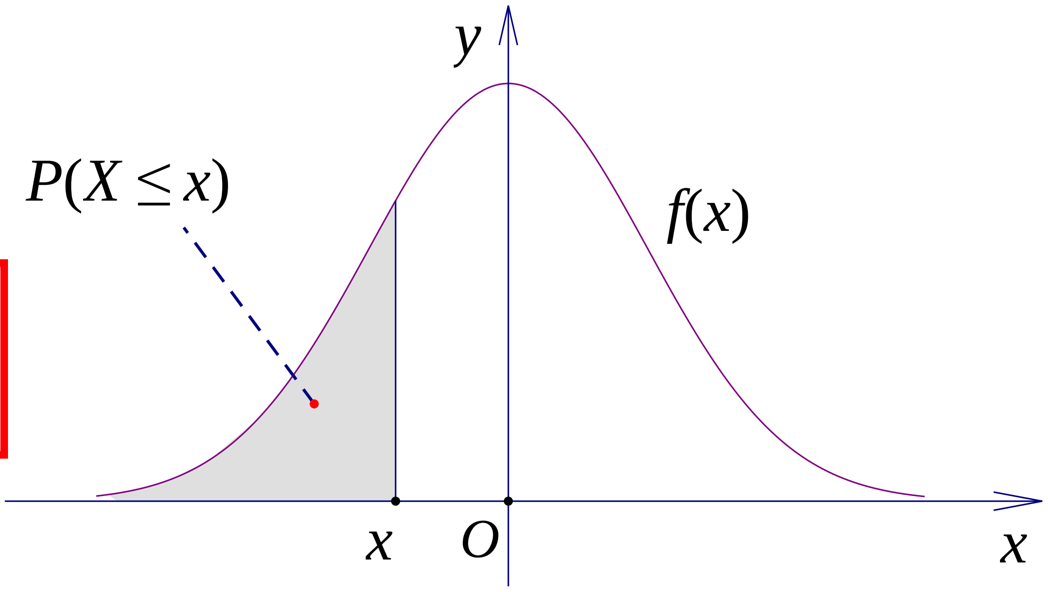
4. Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa. Cho BNN X , hàm phân phối xác suất của X

kí hiệu là $F(x)$ được xác định $\boxed{F(x) = P(X < x).}$

X rời rạc: $\boxed{F(x) = \sum_{t<x} f(t).}$

X liên tục: $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.}$



4. Hàm phân phối xác suất

Tính chất. BNN X có hàm phân phối F và hàm mật độ f

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \le F(X) \le 1.$

2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ nếu $x_1 < x_2$ thì $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Nếu $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ thì $\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a).}$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

5. $\boxed{f(x) = F'(x)}$ tại x là điểm liên tục của f.

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất

Nếu X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất là

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
p	p_1	p_2	p_3	....	p_n

thì hàm phân phối $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$ cụ thể

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x \le x_1 \\ p_1 & \text{khi} \quad x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{khi} \quad x_2 < x \le x_3 \\ \quad ..... & ..... \quad ..... \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_k & \text{khi} \quad x_k < x \le x_{k+1} \\ \quad .... & ..... \quad ..... \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{khi} \quad x_{n-1} < x \le x_n \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n & \text{khi} \quad x > x_n \end{cases}$$

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất

Với X là BNN liên tục có hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì hàm phân phối xác suất $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Cụ thể

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{khi} \quad x\in[a,b]\\ 0 & \text{khi} \quad x\notin[a,b]\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad x<a\\ \int_{a}^{x}\varphi(t)dt & \text{khi} \quad a\le x\le b\\ 1 & \text{khi} \quad x>b\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{khi} \quad x\ge a\\ 0 & \text{khi} \quad x<a\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}\int_{a}^{x}\varphi(t)dt & \text{khi} \quad x\ge a\\ 0 & \text{khi} \quad x<a\end{cases}$$

4. Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 9A. Cho X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2
p	0.6	0.3	0.1

Tìm hàm phân phối xác suất của X ?

4. Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 9B. Cho X là BNN rời rạc có bảng phân phối xác suất như sau

X	**-2**	**0**	**1**	**2**	**3**
p	**0.1**	**0.2**	**0.1**	**0.5**	**0.1**

a. Tìm hàm phân phối xác suất của *X*?

b. Tính xác suất $P(0 \le X < 3)$?

4. Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 9C. Tuổi thọ của một bộ phận trong một dây chuyền sản xuất là BNN *X* (tháng) có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{25}{2(x+10)^2} & \text{khi} \quad x\in(0,40)\\ 0 & \text{khi} \quad x\notin(0,40)\end{cases}$$

a. Tìm hàm phân phối xác suất của *X*?

b. Tìm xác suất để tuổi thọ của thiết bị nhỏ hơn 1 năm?

4. Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 9D. Cho BNN X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2} & \text{khi} \quad x\geq 2\\ 0 & \text{khi} \quad x<2\end{cases}$$

a. Tìm hàm phân phối xác suất của X?

b. Tìm $P(-3<X<5)$?

4. Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 10 (BTN). Một người hằng ngày từ nhà đến cơ quan phải qua 4 ngã tư. Xác suất gặp đèn đỏ ở mỗi ngã tư là 25%. Lập hàm phân phối xác suất số lần gặp đèn đỏ của người đó.

Bài 2. Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

2. Phương sai của biến ngẫu nhiên

3. Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên

4. Mode và Median của biến ngẫu nhiên

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa. BNN X rời rạc, có bảng phân phối xác suất dạng

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Kỳ vọng của X kí hiệu là μ hoặc $E(X)$ cho bởi

$$\boxed{\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

hoặc $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ khi X có vô hạn đếm được các giá trị.

BNN X liên tục với hàm mật độ f, kỳ vọng là giá trị

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx.}$$

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

$$\text{Nếu } Y=\varphi(X) \text{ thì } E(Y)=\begin{cases}\sum_i \varphi(x_i)p_i & \text{nếu } X \text{ rời rạc}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx & \text{nếu } X \text{ liên tục.}\end{cases}$$

Tính chất.

1. Với k là hằng số thì $E(k)=k$. 2. $E(kX)=kE(X)$.

3. $\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y).}$ 4. $\boxed{E(XY)=E(X)E(Y)}$ nếu X và Y độc lập.

5. Nếu $X\le Y$ thì $E(X)\le E(Y)$. 6. Nếu $X\ge 0$ thì $E(X)\ge 0$.

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Ý nghĩa của kỳ vọng:

Kỳ vọng nói lên *giá trị trung bình* của biến ngẫu nhiên.

Khi BNN có độ phân tán nhỏ thì kỳ vọng có thể làm đại diện cho giá trị của biến ngẫu nhiên.

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1. BNN X chỉ số lượng hàng hóa bán ra trong một ngày, có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	3	4
P	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

Tính kỳ vọng của X ?

1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2. Tuổi thọ của dân cư tại một quốc gia là BNN *X* có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(100-x)^2 & \text{khi} \quad x \in [0,100] \\ 0 & \text{khi} \quad x \notin [0,100] \end{cases}$$

a) Xác định hằng số k?

b) Tuổi thọ trung bình của dân cư quốc gia trên là bao nhiêu?

c) Tìm tỉ lệ người có tuổi thọ từ 60 đến 70 tuổi?

2. Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa. BNN X có kỳ vọng là μ. Phương sai của biến ngẫu nhiên X là số $E(X-\mu)^2$ nếu nó tồn tại.

Phương sai của X được kí hiệu là Var(X), $D(X)$ hoặc σ^2.

Khi X rời rạc có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

Đối với biến ngẫu nhiên X liên tục $\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}$.

Chú ý. Để tính phương sai của X ta có thể dùng công thức sau

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - \mu^2.}$$

2. Phương sai của biến ngẫu nhiên

Ý nghĩa của phương sai:

Giá trị phương sai biểu thị độ tập trung hay phân tán giữa các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh trung bình của nó

2. Phương sai của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 3. Cho bảng phân phối xác suất của X

X	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,216

Tính kỳ vọng, phương sai của X.

Ví dụ 4. Cho BNN X liên tục, có hàm mật độ xác suất f

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{16} & \text{khi } x\in(-2,2)\\ 0 & \text{khi } x\notin(-2,2)\end{cases}$$

Hãy tính kỳ vọng, phương sai của X.

2. Phương sai của biến ngẫu nhiên

Tính chất.

1. Với k là hằng số thì $Var(k) = 0.$

2. $Var(kX) = k^2.Var(X).$

3. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ nếu X và Y độc lập.

Ví dụ 5. Cho BNN X có kỳ vọng μ, phương sai là σ^2 xác định kỳ vọng và phương sai của $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}.$

Ví dụ 6. Cho các BNN $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập và có cùng kỳ vọng bằng μ và phương sai bằng σ^2. Hãy tìm kỳ vọng, phương sai và dạng chuẩn hóa của $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right).$

3. Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên

Dù rằng phương sai biểu thị sự phân tán của các biến ngẫu nhiên, tuy nhiên lại không cùng đơn vị với các biến ngẫu nhiên đó. Chính vì thế mà người ta đưa ra một tham số mới có ý nghĩa giống như phương sai, nhưng cùng đơn vị với biến ngẫu nhiên. Đại lượng đó gọi là **độ lệch chuẩn** và được ký hiệu là $\sigma(X)$ hoặc $se(X)$.

Biểu thức xác định độ lệch chuẩn $se(X)=\sqrt{\mathrm{var}(X)}$

4. Mode và Median

a. Mode

Định nghĩa: Mode được kí hiệu là $Mod(X)$.

Nếu X là BNN rời rạc thì Mode của X là giá trị mà tại đó xác suất $P(X = Mod(X))$ là lớn nhất.

Nếu X là BNN liên tục thì Mode của X là giá trị mà tại đó hàm mật độ xác suất $f(x)$ đạt cực đại.

Một BNN X có thể có một hay nhiều Mode hoặc không có Mode nào.

4. Mode và Median

b. Median

Định nghĩa. Median (trung vị) được kí hiệu là Med(*X*).

Median là giá trị nằm chính giữa phân phối xác suất của BNN. Nói cách khác đó là giá trị chia phân phối của BNN thành hai phần bằng nhau

Median của biến ngẫu nhiên X là số m sao cho $P(X<m)\le\frac{1}{2}$ và $P(X>m)\le\frac{1}{2}$.

Với X là BNN rời rạc thì $Med(X)=x_i$ nếu $F(x_i)\le\frac{1}{2}\le F(x_{i+1}),\ x_i\in X(\Omega)$.

Với X là BNN liên tục thì $Med(X)=x_0$ nếu $F(x_0)=\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{2}$.

Chú ý: Median là không duy nhất, có thể có nhiều Median.

4. Mode và Median

Ví dụ 7 . Gọi BNN *X* bảng phân phối xác suất.

X	-200000	-50000	30000	100000
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Tìm Mod(*X*) và Med(*X*).