Chương 3

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. CÁC VÍ DỤ DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

1.1. Bài toán vận tải.

Một nhà máy gồm m phân xưởng $P_1, P_2, ..., P_m$ cùng sản xuất một loại hàng hóa với sản lượng hàng tháng là $a_1, a_2, ..., a_m$. Hàng hóa sẽ được trực tiếp chuyên chở từ các phân xưởng đến n đại lý $D_1, D_2, ..., D_n$ với nhu cầu hàng tháng là $b_1, b_2, .., b_n$.

Giả sử cước phí chuyên chở hàng hóa từ phân xưởng đến đại lý thì tỉ lệ thuận với số lượng hàng hóa vận chuyển và chiều dài quãng đường. Bài toán vận tải đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ các phân xưởng đến các đại lý sao cho tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất.

Trước hết, để đơn giản bài toán, ta xét trường hợp *cân bằng thu phát*, nghĩa là khi tổng cung và cầu bằng nhau

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Gọi x_{ij} là số lượng hàng hóa vận chuyển từ phân xưởng P_i đến đại lý D_j và k_{ij} là chi phí vận chuyển trên một đơn vị hàng hóa từ P_i đến D_j, với $i = \overline{1, m}$ và $j = \overline{1, n}$.

Chẳng hạn, x_{12} là số lượng hàng hóa vận chuyển từ P_1 đến D_2 với chi phí vận chuyển trên một đơn vị hàng hóa là k_{12}. Khi đó, chi phí vận chuyển số lượng hàng hóa này là $k_{12}x_{12}$.

Do đó, tổng chi phí vận chuyển là

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \qquad (1.1)$$

Hiển nhiên ta có

$$x_{ij} \geq 0, \text{ với } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (1.2)$$

Do bài toán cân bằng thu phát nên hàng hóa từ các phân xưởng đều được chuyển đi hết đến các đại lý

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = \overline{1,m} \qquad (1.3)$$

và các đại lý nhận được đủ hàng theo nhu cầu

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = \overline{1,n} \ (1.4)$$

Từ đó, ta nhận được *bài toán quy hoạch tuyến tính* tìm kế hoạch tối ưu (tốt nhất) cho bài toán vận tải : Tìm nghiệm (x_{ij}) thỏa (1.2), (1.3) và (1.4) sao cho giá trị f của (1.1) là nhỏ nhất, $f \to \min$.

Ta viết lại hệ thống trên dưới dạng

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_{ij} \qquad (1.5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (1.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ với } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (1.7)$$

Một bộ giá trị các ẩn x_{ij} được gọi là một *phương án*. Phương án nào thỏa (1.6) được gọi là *phương án chấp nhận được*. Mỗi một phương án chấp nhận được cho ta một chi phí vận chuyển f mà ta còn gọi là *hàm mục tiêu*. Phương án chấp nhận được nào cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất chính là nghiệm của bài toán đang khảo sát và được gọi là *phương án tối ưu*.

Ví dụ 1. Một công ty bách hóa có 4 cửa hàng B_1, B_2, B_3, B_4 có nhu cầu về một loại hàng tương ứng là 40, 75, 60, 70 (tấn). Công ty đã đặt mua loại hàng đó ở 3 xí nghiệp A_1, A_2, A_3 với khối lượng tương ứng là 45, 90, 110 (tấn). Giá cước vận chuyển hàng (ngàn đồng/tấn) từ một xí nghiệp đến một cửa hàng cho trong bảng sau

Cửa hàng Xí nghiệp	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	82	73	74	79
A_2	80	75	81	79
A_3	80	77	77	82

Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển hàng từ các xí nghiệp đến các cửa hàng sao cho lượng hàng đặt mua ở các xí nghiệp phải được lấy đi hết, lượng hàng mà các cửa hàng yêu cầu phải được đáp ứng đầy đủ và tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất.

Vì công ty bách hóa đặt mua hàng trên cơ sở yêu cầu của các cửa hàng và

Tổng phát = 45 + 90 + 110 = 245 (tấn)

Tổng thu = 40 + 75 + 60 + 70 = 245 (tấn)

Do đó, có sự cân bằng giữa tổng số lượng hàng đặt mua ở các xí nghiệp (tổng phát) với tổng số lượng hàng mà các cửa hàng yêu cầu (tổng thu).

Gọi $x_{ij} \geq 0$ là số tấn hàng vận chuyển từ A_i đến B_j, với $i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$.

Ta có $x_{ij} \geq 0$, với $i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$.

Tổng chi phí vận chuyển

$$\begin{aligned} f &= 82x_{11} + 73x_{12} + 74x_{13} + 79x_{14} + 80x_{21} + 75x_{22} + \\ &\quad + 81x_{23} + 79x_{24} + 80x_{31} + 77x_{32} + 77x_{33} + 82x_{34} \to \min \end{aligned}$$

Lượng hàng được lấy từ các xí nghiệp (trạm phát)

$A_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 45$

$A_2 : x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 90$

$$A_3 : x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110$$

Lượng hàng thu được ở các cửa hàng (trạm thu)

$$B_1 : x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$$

$$B_2 : x_{12} + x_{22} + x_{32} = 75$$

$$B_3 : x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$

$$B_4 : x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70$$

Từ các phân tích trên, ta có bài toán vận tải sau

$$\begin{aligned} f = {} & 82x_{11} + 73x_{12} + 74x_{13} + 79x_{14} + \\ & + 80x_{21} + 75x_{22} + 81x_{23} + 79x_{24} + \\ & + 80x_{31} + 77x_{32} + 77x_{33} + 82x_{34} \to \min \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 45 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = & 90 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 110 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 70 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}.$$

1.2. Bài toán vật tư

Một xí nghiệp sản xuất m mặt hàng $M_1, M_2, \ldots, M_m$, từ n loại vật tư chủ yếu $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Gọi a_{ij} là số đơn vị vật tư V_i dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm M_j và c_j là lợi nhuận thu được trên một đơn vị mặt hàng M_j, với $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Giả sử xí nghiệp đang tồn kho b_i đơn vị vật tư V_i, với $i = \overline{1,m}$.

Bài toán vật tư nhằm đưa ra phương án sản xuất, nghĩa là lập kế hoạch sản xuất các mặt hàng $M_j,\ j=\overline{1,n}$, sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

Gọi x_j là số đơn vị sản phẩm M_j cần sản xuất. Hiển nhiên, ta có $x_j \geq 0$,

và tổng lợi nhuận thu được là

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Ngoài ra, số đơn vị vật tư V_i dùng để sản xuất không được quá số lượng vật tư tồn kho b_i, nghĩa là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=\overline{1,m}$$

Khi đó, ta nhận được bài toán

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=\overline{1,m} \qquad (1.9)$$

$$x_j \geq 0,\ \ j=\overline{1,n} \qquad (1.10)$$

Ví dụ 2. Một xí nghiệp sản xuất giấy hiện có số lượng bột gỗ và chất hồ keo tương ứng là 5.580m^3 và 90 tấn. Các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn. Xí nghiệp có thể sản xuất ra ba loại giấy A, B, C. Biết số liệu các loại nguyên liệu để sản xuất ra 1 tấn giấy thành phẩm được cho trong bảng sau

Sản phẩm Nguyên liệu	A	B	C
Bột gỗ (m^3)	1,5	1,8	1,6
Chất hồ keo (kg)	20	30	24

Ngoài ra, giả sử rằng sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết với lợi nhuận khi sản xuất 1 tấn giấy A, B, C tương ứng là 2,7; 3,6; 3 (triệu đồng). Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất tối ưu.

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số tấn giấy A, B, C cần phải sản xuất. Vì số sản phẩm sản xuất ra không thể là số âm nên ta có điều kiện

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Tổng lợi nhuận thu được là

$$f = 2,7x_1 + 3,6x_2 + 3x_3 \text{ (triệu đồng).}$$

Do số lượng nguyên liệu cần để sản xuất không thể vượt quá số lượng hiện có nên từ số lượng bột gỗ tồn kho, ta có

$$1,5x_1 + 1,8x_2 + 1,6x_3 \leq 5580,$$

và số lượng chất hồ keo cho

$$20x_1 + 30x_2 + 24x_3 \leq 90000.$$

Từ các phân tích trên, ta được bài toán vật tư sau

$$f = 2,7x_1 + 3,6x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 1,8x_2 + 1,6x_3 & \leq & 5580 \\ 20x_1 + 30x_2 + 24x_3 & \leq & 90000 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

2. PHÂN LOẠI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Trong phần này, chúng ta xét các dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính nhằm phục vụ cho việc xây dựng giải thuật đơn hình khảo sát trong phần 5. Ngoài ra, ta cũng xét giải thuật chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc, dạng cơ bản của thuật toán đơn hình.

2.1. Các dạng chính của bài toán quy hoạch tuyến tính.

2.1.1. Dạng tổng quát.

Tìm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \quad (\max)$$

với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \left(i = \overline{1,k}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & \left(i = \overline{k+1,l}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & \left(i = \overline{l+1,m}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

và các ràng buộc về dấu

$$x_j \ge 0,\ x_j \le 0 \text{ hay } x_j \in \mathbb{R},\ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

a. Phương án

Một véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là phương án (hay phương án chấp nhận được) của bài toán nếu nó thỏa hệ ràng buộc (1).

Tập hợp tất cả các phương án của bài toán gọi là miền ràng buộc, ký hiệu là D hoặc X, hoặc Y.

Chú ý

Một ràng buộc gọi là chặt đối với phương án x, nếu xảy ra dấu " = ", nghĩa là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ ;\ x_j = 0.$$

Một ràng buộc gọi là lỏng đối với phương án x, nếu xảy ra dấu " > hoặc < ", nghĩa là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$; $x_j < 0$; $x_j > 0$.

b. Phương án tối ưu.

Một phương án làm cho hàm mục tiêu đạt cực tiểu (ứng với bài toán min) hoặc đạt cực đại (ứng với bài toán max) gọi là phương án tối ưu. Ký hiệu là x^*. Khi đó $f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

c. Bài toán giải được

Bài toán quy hoạch tuyến tính có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán giải được.

Bài toán quy hoạch tuyến tính không có phương án hay có phương án nhưng nó làm cho hàm mục tiêu không bị chặn dưới (với bài toán cực tiểu) hoặc không bị chặn trên (với bài toán cực đại) trong miền ràng buộc thì gọi là bài toán không giải được.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính là tìm tất cả các phương án tối ưu của nó (nếu có) và giá trị tối ưu tương ứng, hay là chứng tỏ bài toán là không giải được.

d. Phương án cực biên

Một phương án có n ràng buộc chặt độc lập tuyến tính gọi là phương án cực biên.

- Một phương án cực biên có đúng n ràng buộc chặt gọi là phương án cực biên không suy biến.
- Một phương án cực biên có nhiều hơn n ràng buộc chặt gọi là phương án cực biên suy biến.

Một phương án có ít hơn n ràng buộc chặt độc lập tuyến tính gọi là phương án không cực biên.

Ví dụ 3. Cho quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát (S).

$$f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \le 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \le 2 \\ x_1 & & & & & \ge 0 \\ & & x_2 & & & \ge 0 \\ & & & & x_3 & \ge 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $x = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ là phương án cực biên không suy biến.

b) Chứng minh rằng $x = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ không là phương án cực biên.

Giải

a) Trước hết ta chứng minh x là phương án của (S), tức là nó phải thỏa hệ ràng buộc của bài toán

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2.0 + \frac{2}{3} + 2.\frac{2}{3} = 2$ (thỏa chặt)

$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.0 + 2.\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$ (thỏa chặt)

$x_1 = 0$ (thỏa chặt)

$x_2 = 2/3 > 0$ (thỏa lỏng)

$x_3 = 2/3 > 0$ (thỏa lỏng)

Ta thấy tất cả các ràng buộc đều thỏa nên x là phương án của (S), trong đó có 3 ràng buộc thỏa chặt. Ta dễ dàng chứng minh được 3 ràng buộc này độc lập tuyến tính vì

Từ ràng buộc chung thứ nhất ta có véc tơ $u_1 = (2, 1, 2)$

Từ ràng buộc chung thứ hai ta có véc tơ $u_2 = (4, 2, 1)$

Từ ràng buộc biến thứ nhất ta có véc tơ $u_3 = (1, 0, 0)$

Mà ba véc tơ này độc lập tuyến tính

Bài toán có 3 biến nên $n = 3$. Số ràng buộc thỏa chặt độc lập tuyến tính = số biến = 3. Nên $x = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ là phương án cực biên không suy biến.

b) Trước hết ta chứng minh x là phương án của (S), tức là nó phải thỏa hệ ràng buộc của bài toán

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2.\frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3} < 2 \qquad \text{(thỏa lỏng)}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.\frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{4}{3} < 2 \qquad \text{(thỏa lỏng)}$$

$$x_1 = 1/3 > 0 \qquad \text{(thỏa lỏng)}$$

$$x_2 = 0 \qquad \text{(thỏa chặt)}$$

$$x_3 = 0 \qquad \text{(thỏa chặt)}$$

Ta thấy tất cả các ràng buộc đều thỏa nên x là phương án của (S), trong đó có 2 ràng buộc thỏa chặt < số ẩn bằng 3 nên x không là phương án cực biên.

Ví dụ 4. Cho quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát (S).

$$f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x = (0, 1, 0)$ là phương án cực biên suy biến.

Giải

Trước hết ta chứng minh x là phương án của (S), tức là nó phải thỏa hệ ràng buộc của bài toán

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2.0 + 2.1 + 2.0 = 2$ (thỏa chặt)

$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.0 + 2.1 + 0 = 2$ (thỏa chặt)

$x_1 = 0$ (thỏa chặt)

$x_2 = 1 > 0$ (thỏa lỏng)

$x_3 = 0$ (thỏa chặt)

Ta thấy tất cả các ràng buộc đều thỏa nên x là phương án của (S), trong đó có 4 ràng buộc thỏa chặt nhiều hơn số biến $n = 3$. Do đó $x = (0, 1, 0)$ là phương án cực biên suy biến.

2.1.2. Dạng chính tắc.

Tìm $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ sao cho

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \quad (\max)$$

với điều kiện ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \ge 0, \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}.$$

2.1.3. Dạng chuẩn.

Tìm $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ sao cho

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \quad (\max)$$

với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , b_i \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Ví dụ 5. Tìm $\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)$ sao cho

$$f = 2x_2 + x_4 - 1 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 3 \\ \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad = 1 \\ \qquad 3x_2 \qquad - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

Trong bài toán này, ta có các ẩn cơ sở là x_1, x_3, x_5 và các ẩn tự do là x_2, x_4.

2.2. Giải thuật chuyển dạng tổng quát về dạng chính tắc.

Để chuyển bài toán quy hoạch dạng tổng quát về dạng chính tắc, nghĩa là ta cần chuyển các ràng buộc bất phương trình về ràng buộc phương trình cũng như chuyển các ràng buộc về dấu bất kỳ về ràng buộc dấu không âm, ta dùng phương pháp *ẩn bù* và *ẩn phụ* như sau

Để chuyển các ràng buộc bất phương trình về phương trình, ta dùng các ẩn giả :

i) Nếu gặp ràng buộc $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ ta thêm vào vế trái *ẩn bù* $x_{n+i} \geq 0$ với hệ số bằng 1 để đưa ràng buộc bất phương trình nêu trên về ràng buộc dạng phương trình như sau:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

ii) Nếu gặp ràng buộc dạng $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ ta thêm vào vế trái *ẩn bù* $x_{n+i} \geq 0$ với hệ số bằng (-1) để đưa ràng buộc bất phương trình trên về ràng buộc dạng phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i .$$

Để chuyển các ràng buộc về dấu chưa đúng hay không có ràng buộc về dấu về ràng buộc về dấu là không âm, ta dùng các ẩn phụ:

iii) Nếu gặp ràng buộc dạng $x_j \le 0$ ta thay ẩn x_j bằng ẩn phụ $x'_j = -x_j$ để nhận được ràng buộc $x'_j \ge 0$.

iv) Nếu ẩn x_j không có ràng buộc về dấu, ta dùng hai ẩn phụ x'_j và x''_j, với $x_j = x'_j - x''_j$, để nhận được các ràng buộc $x'_j \ge 0$, $x''_j \ge 0$.

Ví dụ 6. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & \le & 25 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & \ge & 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

Bằng cách đặt $x'_3 = -x_3$, với $x'_3 \ge 0$; $x_4 = x'_4 - x''_4$, với $x'_4, x''_4 \ge 0$, ta nhận được bài toán quy hoạch dạng chính tắc

$$f = x_1 + 2x_2 + x'_3 + 3x'_4 - 3x''_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x'_3 + 2x'_4 - 2x''_4 & & & = & 8 \\ x_1 + x_2 - 2x'_3 - x'_4 + x''_4 & + x_5 & & = & 25 \\ -x_1 + x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 & & - x_6 & = & 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, x_5, x_6 \ge 0.$$

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Tính chất 1: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có tập các phương án $D \ne \varnothing$, và $r(A) = n$, thì bài toán có phương án cực biên.

Tính chất 2: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có tập các phương án $D \ne \varnothing$, và $f(x)$ bị chặn trên D thì có phương án tối ưu.

Tính chất 3: Bài toán toán quy hoạch tuyến tính có và chỉ có 3 khả năng sau:

- Bài toán không có phương án tối ưu.
- Bài toán có duy nhất một phương án tối ưu.
- Bài toán có vô số phương án tối ưu.

4. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Phương pháp hình học sẽ giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến. Còn đối với hàm nhiều hơn hai biến rất khó khi vẽ hình hoặc vẽ hình không được, ta sẽ giải bằng thuật toán đơn hình ở mục 5.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính có hai biến

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \begin{bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{bmatrix} b_i & i = \overline{1,m} \\ x_j \begin{bmatrix} \ge 0 \\ \le 0 \\ \in \mathbb{R} \end{bmatrix} & j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Bước 1: Xác định tập phương án D

Biểu diễn các phương trình và các bất phương trình trong hệ ràng buộc của bài toán trên cùng một mặt phẳng tọa độ $(0x_1x_2)$ và xác định phần giao của các miền nghiệm. Phần giao này ta gọi là miền phương án D.

Ví dụ 7. Biểu diễn bất phương trình $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ trên $(0x_1x_2)$. Đầu tiên ta vẽ đường thẳng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, đường thẳng này chia mặt phẳng tọa độ $(0x_1x_2)$ làm hai nửa mặt phẳng. Một nửa mặt phẳng bao gồm các điểm $M(x_1, x_2)$ thỏa $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$. Một nửa mặt phẳng kia bao gồm các điểm $M(x_1, x_2)$ thỏa $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$. Do đó để xác định được miền nghiệm cần tìm, sau khi vẽ đường thẳng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, ta lấy một điểm bất kỳ, thường là chọn các điểm (0,0); (0,1);

(1,0);…. rồi thế vào $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, nếu nó thỏa mãn thì nửa mặt phẳng chứa điểm đó là miền nghiệm cần tìm, còn nếu nó không thỏa thì miền nghiệm phải tìm là nửa mặt phẳng còn lại.

Tương tự cho các ràng buộc khác trong hệ, sau khi biểu diễn xong, ta lấy phần giao của các miền nghiệm ta sẽ được miền phương án D.

Bước 2: Biểu diễn hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu $c_1x_1 + c_2x_2 = f$. Ta thấy mỗi điểm $M(x_1, x_2)$ trong $(0x_1x_2)$ sẽ cho ta giá trị hàm mục tiêu tương ứng.

Hàm mục tiêu có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (c_1, c_2)$.

Đầu tiên ta vẽ đường $\left(L_0\right)$ đi qua $O(0,0)$ và vuông góc với véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (c_1, c_2)$. Sau đó lấy một điểm $M(x_1, x_2)$ bất kỳ nằm trong D, vẽ đường thẳng (L) đi qua M và song song với $\left(L_0\right)$. Đường thẳng (L) chính là đường mức biểu diễn hàm mục tiêu.

Bước 3: Xác định phương án tối ưu

- Trường hợp bài toán có hàm mục tiêu cực tiểu

Dịch chuyển song song đường (L) theo chiều ngược với véctơ $\vec{n}$. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

a) Nếu (L) luôn cắt D thì bài toán không có phương án tối ưu, hàm mục tiêu không bị chặn dưới, $\left(f \to -\infty\right)$.

b) Nếu dịch chuyển (L) đến mức thấp nhất mà L còn giao với D, khi đó D sẽ nằm về một phía của (L), và điểm $(x_0, y_0) = L \cap D$ chính là phương án tối ưu của bài toán, giá trị hàm mục tiêu tối ưu là $f_{min} = c_1x_0 + c_2x_0$.

- Trường hợp hàm mục tiêu cực đại

Dịch chuyển song song đường (L) theo chiều cùng với véctơ $\vec{n}$. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

a) Nếu (L) luôn cắt D thì bài toán không có phương án tối ưu, hàm mục tiêu không bị chặn trên, $(f \to +\infty)$.

b) Nếu dịch chuyển (L) đến mức cao nhất mà (L) còn giao với D, khi đó D sẽ nằm về một phía của (L), và điểm $(x_0, y_0) = L \cap D$ chính là phương án tối ưu của bài toán, giá trị hàm mục tiêu tối ưu là $f_{max} = c_1x_0 + c_2x_0$.

Ví dụ 8. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp hình học

$$f = 4x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ 4 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 9 \end{cases}$$

Giải

Bước 1. Xác định miền chấp nhận được (tập phương án chấp nhận được) từ các ràng buộc.

Ta có:

$$2x_1 + x_2 = 14 \quad \boxed{1}$$

x_1	0	7
x_2	14	0

$$2x_1 + 5x_2 = 30 \quad \boxed{2}$$

x_1	0	15
x_2	6	0

$x_1 = 4 \quad \boxed{3}$

$x_1 = 10 \quad \boxed{4}$

$x_2 = 9 \quad \boxed{5}$

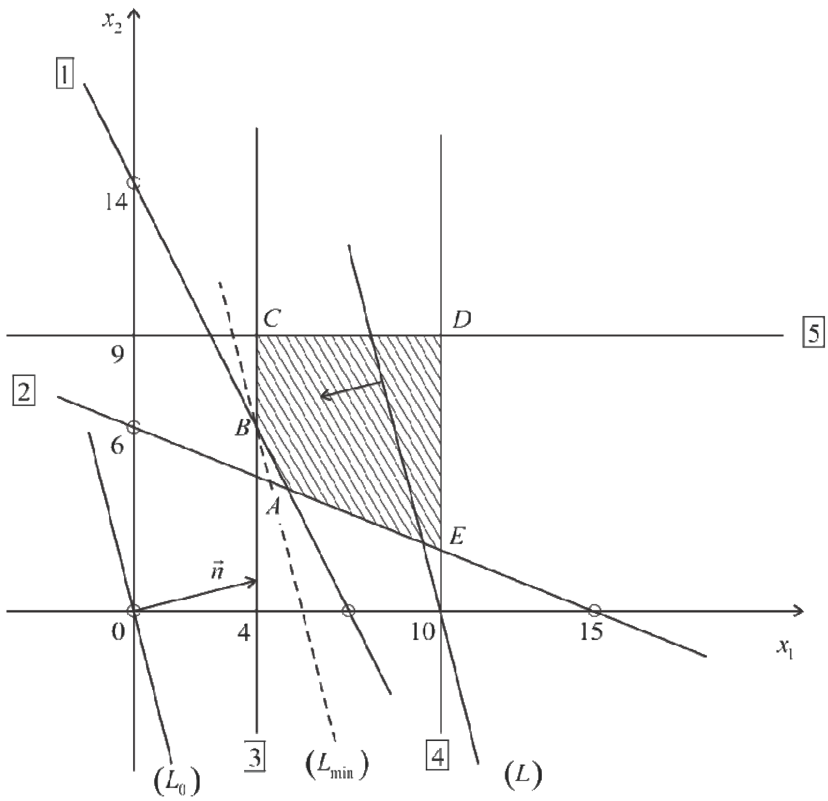
Bước 2. Vẽ hàm mục tiêu (đường mức (L))

Ta có pháp vectơ $\vec{n} = (4,1)$. Vẽ đường (L_0) vuông góc với $\perp \vec{n}$ tại gốc tọa độ 0. Từ một điểm bất kỳ trong miền chấp nhận được vẽ (L) song song với (L_0).

Bước 3. Di chuyển đường (L) ngược chiều với pháp vectơ $\vec{n}$ thì điểm cuối cùng của (L) còn giao với miền chấp nhận được là điểm B(4,6).

Vậy bài toán có phương án tối ưu là $x_1 = 4; x_2 = 6$ với $f_{min} = f(4,6) = 22$.

Hình vẽ minh họa



5. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH.

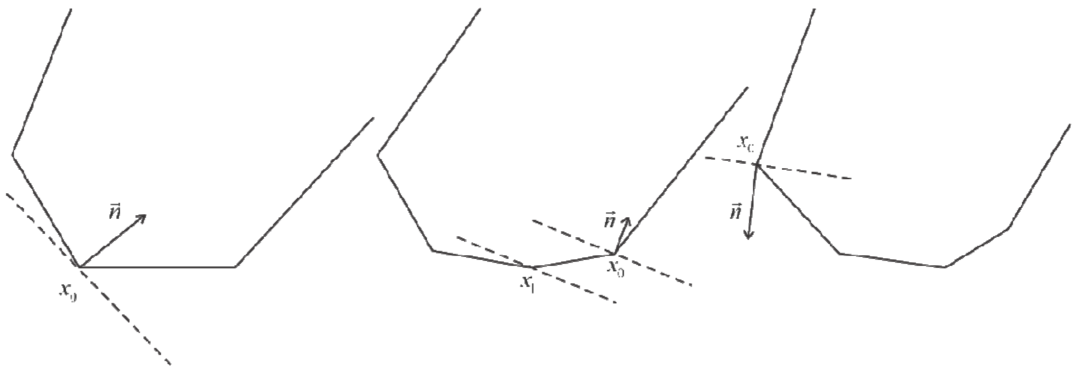
5.1. Mô tả hình học của phương pháp đơn hình

Thuật toán đơn hình xuất phát từ một đỉnh (phương án) $x_0 \in D$. Xét tại điểm x_0 có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

a) Trên mọi cạnh của miền chấp nhận được D, xuất phát từ x_0 giá trị hàm mục tiêu đều không giảm (hình a). Khi đó x_0 là phương án tối ưu của bài toán.

b) Mọi cạnh xuất phát từ x_0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm. Nghĩa là, nếu ta di chuyển đường mức theo chiều ngược với chiều pháp vectơ đến điểm x_1, ta có $f(x_1) < f(x_0)$ (hình b). Gán $x_0 := x_1$ và lặp lại quá trình tính toán với điểm x_0 mới.

c) Có một cạnh vô hạn xuất phát từ x_0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm. Khi đó giá trị hàm mục tiêu sẽ tiến đến $-\infty$ (hình c), do đó bài toán không có phương án tối ưu.



Hình a　　Hình b　　Hình c

5.2. Cơ sở lý thuyết của phương pháp đơn hình

a) Phương án cực biên.

Do bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc đạt nghiệm tối ưu tại ít nhất một phương án cực biên nên ta quan tâm đến các tính chất của nó.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau

$$f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (*)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Đặt

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Xét một phương án chấp nhận được $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)^T \in D$, thỏa hệ (*). Ký hiệu

$$J(x^0) = \left\{ j \in \{1, 2, ..., n\} \middle| x_j^0 > 0 \right\}$$

Điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cựu biên.

Định lý: *Phương án chấp nhận được* $x^0 \in D$ *là phương án cực biên khi và chỉ khi các vec tơ* $\left\{ A_j \middle| j \in J(x^0) \right\}$ *độc lập tuyến tính.*

b) Điều kiện tối ưu

Gọi x^0 là phương án cực biên, cơ sở J. Đặt $\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j a_{kj} - c_k$

Với phương án cực biên x^0, cơ sở J của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $f \to \min$ mà $\Delta_k \leq 0$ thì x^0 là phương án tối ưu.

5.3. Thuật toán đơn hình

5.3.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng đơn hình

Xét bài toán tìm $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ sao cho

$$f + c_{r+1}x_{r+1} + ... + c_n x_n = c_0,\ f \to \min \tag{4}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \quad ... \\ \qquad\quad x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a_{r,n}x_n = b_r \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

trong đó $b_1, b_2, ..., b_r \ge 0$.

Đối với bài toán quy hoạch dạng đơn hình (4 – 6), ta gọi x_1, x_2, ..., x_r là các *ẩn cơ sở* và $\mathscr{B} = \left\{x_1, x_2, ..., x_r\right\}$ là cơ sở tương ứng, còn x_{r+1}, ..., x_n là các *ẩn tự do*. Nhắc lại rằng ẩn cơ sở là ẩn chỉ xuất hiện trong một phương trình và có hệ số là 1.

a) Phương pháp đơn hình.

Bằng cách cho các ẩn tự do bằng 0 : $x_{r+1} = ... = x_n = 0$, hệ phương trình (5) cho $x_i = b_i$, $i = \overline{1, r}$ và ta nhận được phương án cực biên đầu tiên $\left(b_1, b_2, ..., b_r, 0, ..., 0\right)$ ứng với cơ sở $\mathscr{B} = \left\{x_1, x_2, ..., x_r\right\}$. Giá trị của f tại nghiệm cực biên này là $f_{\mathscr{B}} = c_0$.

Tiếp theo, ta sẽ tìm cách chuyển từ phương án cực biên này qua phương án cực biên khác sao cho giá trị của f tại phương án cực biên mới nhỏ hơn hoặc bằng giá trị của f tại phương án cực biên cũ.

Trước hết, nhận xét rằng vì

$$f = c_0 - \left(c_{r+1}x_{r+1} + ... + c_n x_n\right), \tag{7}$$

trong đó $x_{r+1},\dots,x_n \geq 0$, ta có các khả năng sau :

Khả năng 1. Tất cả các hệ số $c_{r+1},\dots,\ c_n$ đều không dương, nghĩa là $c_{r+1},\dots,c_n \leq 0$. Khi đó biểu thức (7) cho $f \geq c_0$ và do đó $f_{min} = c_0$. Vậy phương án cực biên nhận được $\left(b_1, b_2, \dots, b_r, 0, \dots, 0\right)$ chính là phương án tối ưu.

Khả năng 2. Trong các hệ số $c_{r+1},\dots,c_n$ có một hệ số dương, chẳng hạn $c_j > 0$. Vì

$$f = c_0 - \left(c_{r+1}x_{r+1} + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n\right)$$

nên khi giữ nguyên $x_{r+1} = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = x_n = 0$ và cho x_j thay đổi, ta được $f = c_0 - c_jx_j$ và do đó ta có thể làm giảm giá trị của f bằng cách tăng thêm giá trị của x_j. Lưu ý rằng, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 & = & b_1 - a_{1,j}x_j \\ x_2 & = & b_2 - a_{2,j}x_j \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k & = & b_k - a_{k,j}x_j \\ \dots & \dots & \dots \\ x_r & = & b_r - a_{r,j}x_j \end{cases}$$

nên khi x_j thay đổi thì $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r$ cũng thay đổi.

Do các ràng buộc về dấu, $x_1, x_2, \dots, x_r \geq 0$, ta có hai trường hợp :

Trường hợp 1. Tất cả các hệ số $a_{1,j},\ a_{2,j},\ \dots,\ a_{r,j}$ đều không dương, nghĩa là $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{r,j} \leq 0$. Khi đó, vì $x_k = b_k - a_{k,j}x_j \geq 0$, với $k = 1, \dots, r$, khi $x_j \geq 0$ nên x_j có thể tăng một cách tùy ý và do đó $f \to -\infty$. Hàm mục tiêu không đạt giá trị nhỏ nhất nên bài toán không có phương án tối ưu.

Trường hợp 2. Tồn tại $k \in \{1, 2, ..., r\}$ sao cho $a_{k,j} > 0$. Vì $x_k = b_k - a_{k,j}x_j \geq 0$ nên $x_j \leq \frac{b_k}{a_{k,j}}$. Điều này có nghĩa là x_j chỉ được phép tăng tối đa đến giá trị $\frac{b_k}{a_{k,j}}$ để có thể đảm bảo điều kiện $x_k \geq 0$.

Đặt $\lambda = \min\left\{\frac{b_k}{a_{k,j}} \middle| a_{k,j} > 0\right\}$ thì $\lambda > 0$ và x_j không thể tăng quá giá trị λ. Chọn phần tử $a_{i,j}$ sao cho $\frac{b_i}{a_{i,j}} = \lambda$. Ta gọi $a_{i,j}$ là *phần tử trục xoay*. Bấy giờ, cho $x_{r+1} = ... = x_{j-1} = 0$; $x_j = \lambda$; $x_{j+1} = ... = x_n = 0$, ta suy ra giá trị các ẩn còn lại

$$\begin{cases} x_1 & = & b_1 - a_{1,j}\lambda \\ ... & ... & ... \\ x_i & = & b_i - a_{i,j}\lambda \\ ... & ... & ... \\ x_r & = & b_r - a_{r,j}\lambda \end{cases}$$

Từ đó ta nhận được phương án cực biên mới mà tại đó giá trị của f nhỏ hơn giá trị của nó tại phương án cực biên cũ.

Cụ thể, từ phương trình thứ i của hệ ràng buộc (5),

$$x_i + a_{i,r+1}x_{r+1} + ... + a_{i,n}x_n = b_i,$$

ta chia hai vế cho $a_{i,j}$, ta được

$$\frac{1}{a_{i,j}}x_i + \frac{a_{i,r+1}}{a_{i,j}}x_{r+1} + ... + x_j + ... + \frac{a_{i,n}}{a_{i,j}}x_n = \frac{b_i}{a_{i,j}}$$

Do đó, x_j có thể tính được theo các ẩn x_{r+1}, ..., x_i, ..., x_n nên bằng cách thay thế vào các phương trình còn lại của hệ ràng buộc cũng như vào biểu thức xác định f, ta nhận được hệ ràng buộc mới, trong đó các ẩn cơ sở là x_1, ...,x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_r và các ẩn tự do là $x_{r+1}, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n$. Khi đó, hàm mục tiêu f chỉ phụ thuộc vào các ẩn tự do.

Để trình bày cô đọng giải thuật đơn hình vừa nêu, người ta viết bài toán quy hoạch tuyến tính dạng đơn hình (4 – 6) dưới dạng bảng mà ta gọi là *bảng đơn hình* như sau:

b) Bảng đơn hình.

Bảng đơn hình gồm nhiều cột trong đó cột thứ nhất dành cho tên các ẩn cơ sở (ACS), cột thứ nhì dành cho các số hạng tự do (SHTD) và các cột còn lại dành cho hệ số các ẩn. Mỗi hàng trong bảng dành cho một ràng buộc phương trình trong (5) và hàng cuối bảng dành cho hàm mục tiêu (4).

ACS	SHTD	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,r+1}$	...	$a_{1,j}$	...	$a_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	b_i	0	...	1	...	0	$a_{i,r+1}$	...	$a_{i,j}$	...	$a_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	$a_{r,j}$	...	$a_{r,n}$
f	c_0	0	...	0	...	0	c_{r+1}	...	c_j	...	c_n

Với bảng đơn hình này, bằng cách cho các ACS bằng với SHTD tương ứng, các ẩn tự do (ATD) bằng 0, ta nhận được phương án cực biên.

Giá trị của f tại phương án cực biên này là $f = c_0$, nghĩa là f bằng với số hạng tự do tương ứng của nó.

Để khảo sát xem phương án cực biên này đã là phương án tối ưu chưa, ta khảo sát các hệ số của bảng đơn hình này. Trước hết, xét các số hạng ở hàng cuối, hàng chứa các hệ số hàm mục tiêu. Ta có hai khả năng :

Khả năng 1. Mọi số hạng c_i của hàng cuối nhỏ hơn hoặc bằng không (trừ c_0). Ta kết luận phương án cực biên của bảng đơn hình này là phương án tối ưu.

Khả năng 2. Có một hệ số của hàng cuối lớn hơn không, giả sử đó là $c_j > 0$. Ta xét các số hạng ở cột chứa $c_j > 0$ và ta có hai trường hợp :

Trường hợp 1. Mọi hệ số trong cột này đều ≤ 0. Khi đó $f \to -\infty$ khi $x_j \to +\infty$. Vậy ta kết luận bài toán khảo sát không có phương án tối ưu.

Trường hợp 2. Có ít nhất một hệ số trong cột > 0. Chọn phần tử trục xoay a_{ij} thỏa

$$\frac{b_i}{a_{i,j}} = \min\left\{ \frac{b_k}{a_{k,j}} \,\middle|\, a_{k,j} > 0 \right\}.$$

Dùng các phép biến đổi theo dòng như trong phương pháp Gauss-Jordan giải hệ thống phương trình tuyến tính, để biến a_{ij} thành số 1, các phần tử còn lại trên cột, gồm các số hạng $a_{1,j}$, $a_{2,j}$, ..., $a_{i,j}$, ..., $a_{r,j}$, c_j, thành số 0. Ta nhận được một hệ ràng buộc mới tương đương với ràng buộc ban đầu (5). Tuy nhiên, khi đó ẩn tự do x_j trở thành ẩn cơ sở, còn ẩn cơ sở x_i trở thành ẩn tự do.

Cuối cùng, ta nhận được bảng đơn hình mới tương ứng với bài toán quy hoạch tuyến tính mới tương đương. Bảng đơn hình mới này cho phương án cực biên mới có giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn giá trị hàm mục tiêu tại phương án cực biên cũ.

ACS	SHTD	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b'_1	1	...	$a'_{1,i}$	...	0	$a'_{1,r+1}$	...	0	...	$a'_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_j	b'_j	0	...	$a'_{j,i}$	...	0	$a'_{i,r+1}$	...	1	...	$a'_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	b'_r	0	...	$a'_{r,i}$	...	1	$a'_{r,r+1}$	...	0	...	$a'_{r,n}$
f	c'_0	0	...	c'_i	...	0	c'_{r+1}	...	0	...	c'_n

Quá trình trên cứ tiếp tục cho đến khi ta tìm ra được phương án tối ưu hoặc kết luận được rằng $f \to -\infty$ (không có phương án tối ưu), tới lúc đó giải thuật đơn hình kết thúc.

Ví dụ 9. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f - x_4 + x_5 = 0, \ (f \to \min)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 - 2x_5 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad - 2x_4 + x_5 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

Ta có bảng đơn hình sau

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Tỷ số
x_1	1	1	0	0	1	-2	
x_2	2	0	1	0	-2	**1**	$\frac{2}{1} = 2$
x_3	3	0	0	1	3	1	$\frac{3}{1} = 3$
f	0	0	0	0	-1	1	

Bảng đơn hình này cho phương án cực biên $(1, 2, 3, 0, 0)$, với $f = 0$.

Do hàng cuối có một số hạng dương ($c_5 = 1 > 0$) trên cột này có hai số dương ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 (vì $\frac{2}{1} < \frac{3}{1}$). Dùng các phép biến đổi sơ cấp, ta có $(1) := (1) + 2(2)$; $(3) := (3) - (2)$; $(4) := (4) - (2)$, ta được bảng đơn hình mới:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	-3	0
x_5	2	0	1	0	-2	1
x_3	1	0	-1	1	**5**	0
f	-2	0	-1	0	1	0

Bảng đơn hình này cho phương án cực biên mới là $(5,0,1,0,2)$, với giá trị hàm mục tiêu $f = -2$, nhỏ hơn giá trị hàm mục tiêu ở phương án cực biên cũ.

Lại dùng thuật giải đơn hình. Hàng cuối có một số hạng dương ($c_4 = 1 > 0$) và trên cột này chứa có một số hạng dương nên nó trở thành phần tử trục xoay. Biến đổi tuần tự $(3) := \frac{1}{5}(3)$; $(1) := (1) + 3(3)$; $(2) := (2) + 2(3)$; $(4) := (4) - (3)$, ta có bảng đơn hình mới trong đó ẩn x_4 trở thành ẩn cơ sở thay cho ẩn x_3

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
f	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

Bảng đơn hình này cho phương án cực biên mới là $\left(\frac{28}{5},0,0,\frac{1}{5},\frac{12}{5}\right)$, với giá trị hàm mục tiêu $f = -\frac{11}{5}$, nhỏ hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án cực biên cũ.

Dùng thuật giải đơn hình cho bảng này: Do mọi số hạng hàng cuối đều ≤ 0 nên phương án vừa nhận được là phương án tối ưu. Vậy phương án tối ưu của bài toán quy hoạch đã cho là $\left(\frac{28}{5},0,0,\frac{1}{5},\frac{12}{5}\right)$ với $f_{\min} = -\frac{11}{5}$.

Ví dụ 10. Giải bài toán quy hoạch sau

$$f + x_1 + x_2 = 0, \ (f \to \min)$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 & = 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

Ta có bảng đơn hình sau

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	-1	1	1	0
x_4	2	**1**	-2	0	1
f	0	1	1	0	0

Phương án cực biên : $(0, 0, 1, 2)$ với $f = 0$.

Hàng cuối có hai số dương ($c_1 = 1 > 0$ và $c_2 = 1 > 0$) ta chọn số dương $c_1 = 1 > 0$, trên cột này có một số dương nên nó chính là phần tử trục xoay. Biến đổi $(1) := (1) + (2)$; $(3) := (3) - (2)$, ta có bảng đơn hình mới trong đó ẩn x_1 trở thành ACS thay cho x_4

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	0	-1	1	1
x_1	2	1	-2	0	1
f	-2	0	3	0	-1

Phương án cực biên : $(2, 0, 3, 0)$ với $f = -2$.

Trong hàng cuối bảng đơn hình này có một số hạng dương ($c_2 = 3 > 0$) trên cột này các số hạng đều âm. Vậy bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho không có phương án tối ưu.

Chú ý : Trong bảng đơn hình đầu tiên của ví dụ 10, hàng cuối có hai số hạng dương mà các cột chứa nó đều có ít nhất một số hạng dương nên ta có thể chọn một trong hai số hạng này để thực hiện giải thuật đơn hình (khả năng 2, trường hợp 2). Tổng quát, ta có

Nếu hàng cuối bảng đơn hình có nhiều số hạng dương, ta xét các khả năng sau :

Khả năng 1 : Có một số hạng dương ở hàng cuối mà mọi số hạng trên cột chứa nó đều không dương (≤ 0). Ta nhận được bảng đơn hình cho khả năng 2, trường hợp 1 : Bài toán không có phương án tối ưu.

Khả năng 2 : Mọi cột chứa số hạng dương ở hàng cuối đều có ít nhất một số hạng dương. Chọn ngẫu nhiên một cột để dùng thuật giải đơn hình (khả năng 2, trường hợp 2).

Tuy nhiên, trong thực tế thường ta chọn số hạng dương *lớn nhất* ở hàng cuối để xét với mong muốn rằng hàm mục tiêu sẽ giảm nhanh hơn.

5.3.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

Tìm $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ sao cho

$$f = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 & & & + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & x_2 & & + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & x_r & + a_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a_{r,n}x_n & = & b_r \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1, n},$$

trong đó $b_1, b_2, ..., b_r \geq 0$.

Do bài toán dưới dạng chuẩn chỉ khác bài toán dạng đơn hình ở biểu thức hàm mục tiêu : các ẩn cơ sở không xuất hiện và các ẩn tự do nằm cùng bên với f. Do đó, để có thể dùng thuật toán đơn hình thì ta biểu diễn lại hàm mục tiêu theo hai yêu cầu sau

i) Các hệ số của ẩn cơ sở trong hàm mục tiêu bằng 0.

ii) Biểu thức chứa ẩn nằm cùng bên với hàm f.

Muốn vậy, từ hệ ràng buộc (8), ta tính giá trị các ẩn cơ sở theo các ẩn tự do, thế vào biểu thức hàm mục tiêu rồi chuyển về cùng vế với f. Ta có

$$x_1 = b_1 - \left(a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1,n}x_n\right)$$

$$...$$

$$x_i = b_i - \left(a_{i,r+1}x_{r+1} + ... + a_{i,n}x_n\right)$$

$$...$$

$$x_r = b_r - \left(a_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a_{r,n}x_n\right)$$

Thế $x_1, ..., x_i, ..., x_r$ vào biểu thức của hàm mục tiêu và chuyển vế, ta được

$$f + c'_{r+1}x_{r+1} + ... + c'_n x_n = c'_0,$$

trong đó

$$c'_0 = c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_rb_r + c_0,\ \ c'_j = \sum_{i=1}^{r} c_i a_{ij} - c_j,$$

với $j = \overline{r+1, n}$.

Bấy giờ, ta nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng đơn hình.

Tuy nhiên, thay vì tính toán trực tiếp trên hệ ràng buộc cũng như trên hàm mục tiêu, ta thành lập bảng đơn hình cho bài toán dạng chuẩn và tìm cách chuyển nó về bảng đơn hình cho bài toán dạng đơn hình như sau:

Lập bảng đơn hình cho bài toán dạng chuẩn trong đó có thêm:

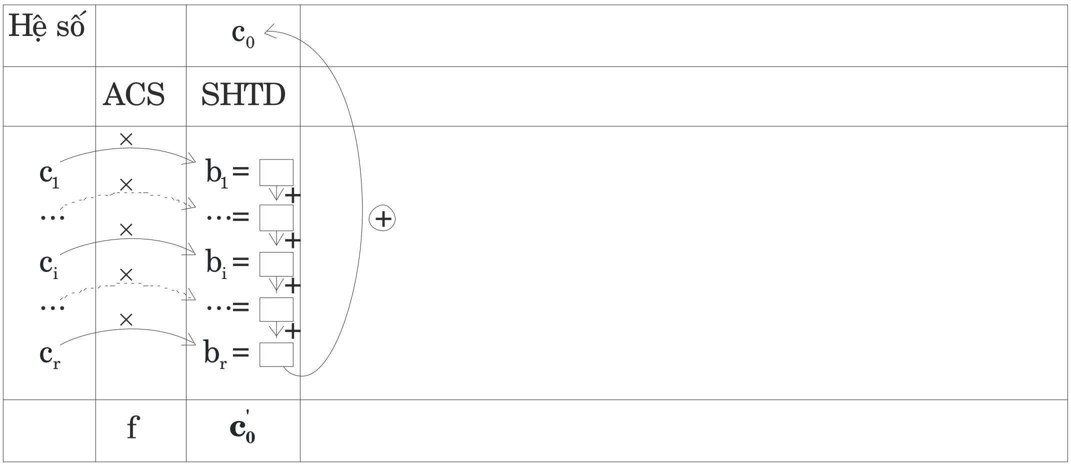
Hàng đầu chứa các hệ số của các ẩn (trong các ràng buộc cũng như trong hàm mục tiêu),

Cột đầu chứa các hệ số của các ẩn cơ sở tương ứng trong cột ACS.

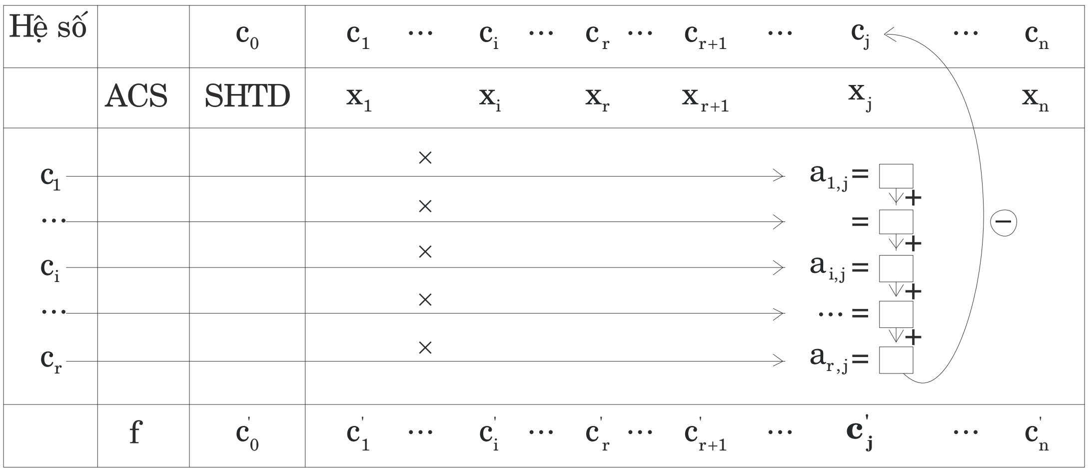
Hệ số		c_0	c_1	...	c_i	...	c_r	c_{r+1}	...	c_j	...	c_n
	ACS	SHTD	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
c_1	x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,r+1}$	...	$a_{1,j}$	...	$a_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_i	x_i	b_i	0	...	1	...	0	$a_{i,r+1}$	...	$a_{i,j}$	...	$a_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_r	x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	$a_{r,j}$	...	$a_{r,n}$
	f	c'_0	0	...	0	...	0	c'_{r+1}	...	c'_j	...	c'_n

Các số hạng ở hàng cuối (hệ số của hàm mục tiêu) được tính như sau :

i) Để tính c_0', ta tính tổng các tích của những số hạng tương ứng trên cột hệ số và cột số hạng tự do rồi cộng với hệ số c_0 trên dòng đầu của bảng.



ii) Để tính c_j', ta lấy tổng các tích của những số hạng tương ứng trên cột hệ số và cột x_j trừ đi hệ số c_j trên dòng đầu của bảng.



Ví dụ 11. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 46 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 38 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 21 \end{cases} \qquad (9)$$

$$x_j \ge 0, \ \forall j = \overline{1,6}.$$

Bài toán trên là dạng chuẩn và ta có bảng đơn hình như sau

Hệ Số	ACS	0 SHTD	5 x_1	4 x_2	5 x_3	2 x_4	1 x_5	3 x_6
2	x_4	46	2	4	3	1	0	0
1	x_5	38	4	2	3	0	1	0
3	x_6	21	3	0	1	0	0	1
	f							

Ta tính các số hạng hàng cuối như sau :

Số hạng cột SHTD : $2 \times 46 + 1 \times 38 + 3 \times 21 + 0 = 193$.

Số hạng cột x_1 : $2 \times 2 + 1 \times 4 + 3 \times 3 - 5 = 12$.

Số hạng cột x_2 : $2 \times 4 + 1 \times 2 + 3 \times 0 - 4 = 6$.

Số hạng cột x_3 : $2 \times 3 + 1 \times 3 + 3 \times 1 - 5 = 7$.

Số hạng cột x_4 : $2 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 0 - 2 = 0$.

Số hạng cột x_5 : $2 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 0 - 1 = 0$.

Số hạng cột x_6 : $2 \times 0 + 1 \times 0 + 3 \times 1 - 3 = 0$.

Ta nhận được bảng đơn hình

Hệ Số	ACS	0 SHTD	5 x_1	4 x_2	5 x_3	2 x_4	1 x_5	3 x_6
2	x_4	46	2	4	3	1	0	0
1	x_5	38	4	2	3	0	1	0
3	x_6	21	**3**	0	1	0	0	1
	f	193	12	6	7	0	0	0

và khi đó, ta có thể bỏ đi hàng đầu cũng như cột đầu trong bảng để nhận được bảng đơn hình cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng đơn hình.

Bảng đơn hình này cho phương án cực biên $(0,0,0,46,38,21)$ với giá trị hàm mục tiêu $f = 193$.

Do hàng cuối có 3 số hạng dương ($c_1 = 12$, $c_2 = 6$, $c_3 = 7$) ta chọn số dương $c_1 = 12$, trên các cột này có 3 số dương ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 3 $\left(\frac{21}{3} < \frac{46}{2}, \frac{38}{4}\right)$. Biến đổi $(3) := \frac{1}{3}(3)$; $(1) := (1) - 2(3)$; $(2) := (2) - 4(3)$; $(4) := (4) - 12(3)$, ta có bảng đơn hình mới sau

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	32	0	4	$\frac{7}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$
x_5	10	0	**2**	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$
x_1	7	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
f	109	0	6	3	0	0	–4

Bảng đơn hình này cho phương án cực biên $(7,0,0,32,10,0)$, với giá trị hàm mục tiêu $f = 109$.

Hàng cuối có 2 số hạng dương ($c_2 = 6$, $c_3 = 3$), ta chọn số dương $c_2 = 6$ trên cột này có hai số dương. Ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 ($\frac{10}{2} < \frac{32}{4}$). Biến đổi $(2) := \frac{1}{2}(2)$; $(1) := (1) - 4(2)$; $(4) := (4) - 6(2)$, ta được bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	12	0	0	-1	1	-2	2
x_2	5	0	1	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	7	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
f	79	0	0	-2	0	-3	0

Từ bảng đơn hình này, ta thấy bài toán có phương án tối ưu là $(7, 5, 0, 12, 0, 0)$ với $f_{min} = 79$.

Chú ý : Ta có thể trực tiếp chuyển bài toán dạng chuẩn (9) về dạng đơn hình như sau :

Từ hệ ràng buộc, tính các ẩn cơ sở theo các ẩn tự do :

$$x_4 = 46 - (2x_1 + 4x_2 + 3x_3);$$
$$x_5 = 38 - (4x_1 + 2x_2 + 3x_3);$$
$$x_6 = 21 - (3x_1 + x_3).$$

Thế vào hàm mục tiêu và chuyển vế các ẩn số :

$$\begin{aligned} 0 &= f - [5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6] \\ &= f - 5x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2(46 - (2x_1 + 4x_2 + 3x_3)) \\ &\quad - (38 - (4x_1 + 2x_2 + 3x_3)) - 3(21 - (3x_1 + x_3)) \end{aligned}$$

ta được

$$f + 12x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 193.$$

Cuối cùng, ta được bài toán quy hoạch dạng đơn hình :

$$f + 12x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 193 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 46 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 38 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 21 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, 6}.$$

5.3.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.

Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình, bài toán đó phải được viết dưới dạng chuẩn. Tuy nhiên, không phải bất kỳ bài toán tổng quát nào cũng đưa được về dạng chuẩn. Nhiều khi sau một quá trình biến đổi phức tạp, ta có thể đưa hệ ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \left(i = \overline{1,m}\right) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

nhưng vế phải của hệ ràng buộc lại có thể xuất hiện các số hạng âm. Như vậy, không thể lấy $\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ làm cơ sở tương ứng cho phương án cực biên được.

Ví dụ 12. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le -5 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Đưa bài toán trên về dạng chính tắc

$$f = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Tuy nhiên, đây không phải là bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng chuẩn vì hệ số tự do của ràng buộc thứ nhất âm, nên ta không lấy $\left(x_3, x_4\right)$ làm cơ sở cho phương án cực biên được.

Năm 1952, Orden đề xuất phương pháp dùng các ẩn giả để đảm bảo luôn tìm được dạng chuẩn cho bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.

Vì bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ luôn có thể đưa về dạng chính tắc, nên trước hết ta chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát về dạng chính tắc với các hệ số tự do của các ràng buộc đều không âm

$$f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Sau đó, ở ràng buộc nào chưa có ẩn cơ sở thì ta thêm ẩn cơ sở mới vào. Ẩn cơ sở mới thêm vào được gọi là *ẩn giả*. Ẩn giả phải không âm và ta cho hệ số tương ứng với nó trong hàm mục tiêu là M, với M là một hằng số mà ta giả định là một số dương rất lớn. Bài toán dạng chuẩn có ẩn giả này được gọi là bài toán mở rộng với hàm mục tiêu $\overline{f}$ (hay ta còn gọi tắt là bài toán (M)). Từ bài toán (10), ta mở rộng thành bài toán (M) :

$$\overline{f} = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{m+n} \to \min$$

với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = & b_m \end{cases} \qquad (11)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+m}.$$

trong đó $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ là các ẩn giả.

Bài toán (10) gọi là *bài toán xuất phát* và bài toán (10) là *bài toán mở rộng* hay *bài toán (M)* của bài toán (10).

Để ý rằng một phương án của bài toán gốc là vectơ n chiều, nhưng một phương án của bài toán (M) lại là một vectơ $n + m$ chiều

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n+m}).$$

Với ký hiệu $(X, 0) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$, ta có

Quan hệ giữa bài toán mở rộng và bài toán xuất phát

Dựa vào miền ràng buộc của bài toán gốc và bài toán (M), ta thấy

- Nếu X là một phương án của bài toán gốc thì $(X, 0)$ là một phương án của bài toán (M) và ngược lại. Hơn nữa, X là một phương án cực biên của bài toán gốc khi và chỉ khi $(X, 0)$ là một phương án cực biên của bài toán (M) và khi đó, ta có $f(X) = \overline{f}(X, 0)$.

- Bài toán (M) có dạng chuẩn với phương án cực biên đầu tiên là $(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$. Xuất phát từ phương án cực biên này, áp dụng phương pháp đơn hình ở mục 5.3, sau một số hữu hạn bước lặp, ta đi đến các khả năng sau :

Khả năng 1 : Bài toán (M) không có phương án tối ưu (theo nghĩa là hàm mục tiêu giảm vô hạn). Ta suy ra rằng bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu.

Khả năng 2 : Bài toán (M) có phương án tối ưu. Khi đó, với phương án tối ưu này, ta có 2 trường hợp :

Trường hợp 1 : Trong phương án tối ưu của bài toán (M), các số hạng tương ứng với các ẩn giả đều bằng 0. Khi đó, bỏ các số hạng tương ứng với các ẩn giả, ta được phương án tối ưu của bài toán gốc với giá trị của hàm mục tiêu $\overline{f} = f$.

Trường hợp 2 : Trong phương án tối ưu của bài toán (M) có số hạng tương ứng với ẩn giả lớn hơn không. Khi đó bài toán gốc không có phương án nên không có phương án tối ưu.

Chú ý. Ta có thể áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán mở rộng với lưu ý : Do hàng hệ số của hàm mục tiêu $\overline{f}$ đều luôn chứa các hằng số nhân với M rồi cộng cho một hằng số nên để trình bày đơn giản, hàng cuối của $\overline{f}$ được chia thành hai hàng, hàng trên ghi các số hệ số tự do, còn hàng dưới ghi các hệ số của M.

Ngoài ra, vì bài toán gốc không có các ẩn giả nên trong bảng đơn hình của bài toán (M), ta không cần thiết ghi các cột tương ứng với các ẩn giả.

Chẳng hạn, bài toán mở rộng (11) được trình bày trong bảng đơn hình sau, trong đó hàng cho hàm mục tiêu được tách làm hai: hàng trên chứa các hằng số và hàng dưới chứa các hệ số của (M).

Hệ số	ACS	c_0 SHTD	c_1 x_1	c_2 x_2	...	c_j x_j	...	c_n x_n
M	x_{n+1}	b_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,j}$	...	$a_{1,n}$
M	x_{n+2}	b_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,j}$	...	$a_{2,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	x_{n+m}	b_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	...	$a_{m,j}$	...	$a_{m,n}$
	$\overline{f}$	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_j$	...	$-c_n$
		c'_0	0	0	...	c'_j	...	c'_n

trong đó c'_0 và c'_j được xác định như trong mục 5.3.2.

Ví dụ 13. Giải bài toán quy hoạch sau

$$f = -8x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -18 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Bài toán trên có dạng chính tắc, nhưng $b_1 = -18 < 0$ nên nhân hai vế của phương trình đó với (-1). Tuy nhiên, nó không phải là dạng chuẩn nên ta đưa thêm hai ẩn giả x_4, x_5 vào hệ ràng buộc để được bài toán (M),

$$\overline{f} = -8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + Mx_4 + Mx_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = -18 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Đây là bài toán dạng chuẩn và có thể dùng thuật toán đơn hình để giải. Trước hết, thành lập bảng đơn hình với hàng hệ số (hàng 1) và cột hệ số (cột 1) để tính các số hạng cho hàm mục tiêu (hàng cuối).

Hệ số	ACS	0 SHTD	–8 x_1	6 x_2	2 x_3
M M	x_4 x_5	18 16	4 4	4 3	–3 4
	$\overline{f}$				

Số hạng hàng cuối được tính như sau :

Số hạng cột SHTD : $18 \times M + 16 \times M + 0 = 34M + 0$.

Số hạng cột x_1 : $4M + 4M - (-8) = 8M + 8$.

Số hạng cột x_2 : $4M + 3M - 6 = 7M - 6$.

Số hạng cột x_3 : $-3M + 4M - 2 = M - 2$.

Do đó, trên hàng đầu của $\overline{f}$, ta ghi các hằng số : 0; 8; -6 và -2 còn trên hàng sau, ta ghi các hệ số của M : 34; 8; 7 và 1.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3
x_4 x_5	18 16	4 **4**	4 3	–3 4
$\overline{f}$	0	8	–6	–2
	34	8	7	1

Trên hàng cuối, do M là một số dương rất lớn nên mọi số hạng đều dương ($8M + 8, 7M - 6, M - 2 > 0$) và trên cột chứa chúng đều có ít nhất một số hạng dương. Chọn cột x_1 (do $8M + 8$ lớn nhất), ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 2 $\left(\frac{16}{4} < \frac{18}{4}\right)$.

Thực hiện các phép biến đổi $(2):=\frac{1}{4}(2)$; $(1):=(1)-4(2)$; $(3):=(3)-8(2)$ và $(4):=(4)-8(2)$ (thực ra là $(4):=(4)-8M(2)$), ta được bảng đơn hình mới như sau

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3
x_4	2	0	**1**	–7
x_1	4	1	$\frac{3}{4}$	1
$\overline{f}$	–32	0	–12	–10
	2	0	1	–7

Hàng cuối chỉ có một số hạng dương ($M-12>0$ khi M lớn) nên ta chọn phần tử trục xoay ở hàng 1 $\left(\frac{2}{1}<\frac{4}{3/4}\right)$. Biến đổi $(2):=(2)-\frac{3}{4}(1)$; $(3):=(3)+12(1)$; $(4):=(4)-(1)$, ta được

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3
x_2	2	0	1	–7
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{25}{4}$
$\overline{f}$	–8	0	0	–94
	0	0	0	0

Tới đây, các ẩn giả đều bị loại khỏi hệ ẩn cơ sở nên ta nhận được bảng đơn hình cho bài toán xuất phát

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3
x_2	2	0	1	–7
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{25}{4}$
f	–8	0	0	–94

Bảng đơn hình này có phương án cực biên $\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$ với giá trị hàm mục tiêu $f = -8$. Hàng cuối gồm toàn số không dương nên ta có phương án tối ưu của bài toán là

$$x_1 = \frac{5}{2};\ x_2 = 2;\ x_3 = 0 \text{ và } f_{min} = -8.$$

Chú ý : Qua ví dụ trên, ta chú ý tới việc xét dấu cũng như so sánh các số hạng nằm trên hai hàng hệ số hàm mục tiêu $\overline{f}$

ACS	SHTD	...	x_i	... x_j ...
$\overline{f}$		...	c_i	... c_j ...
		...	c'_i	... c'_j ...

Điều này có nghĩa là các hệ số của x_i và x_j trong hàm mục tiêu lần lượt là $c'_iM + c_i$ và $c'_jM + c_j$. Do M có thể chọn đủ lớn, ta có $c'_iM + c_i > 0 \Leftrightarrow c'_i > 0$,

$$c'_iM + c_i > c'_jM + c_j \Leftrightarrow \left(c'_i > c'_j\right) \text{ hay } \left(c'_i = c'_j \text{ và } c_i > c_j\right).$$

Tóm lại, để xét dấu cũng như so sánh các số hạng nằm trên hai hàng hệ số của hàm mục tiêu $\overline{f}$, ta ưu tiên xét hàng dưới : hệ số nào có số hạng nào > 0 là hệ số > 0 và ứng với hai hệ số, hệ số nào có số hạng hàng dưới lớn hơn thì lớn hơn, khi hai hệ số có số hạng hàng dưới bằng nhau, hệ số nào có số hạng hàng trên lớn hơn thì lớn hơn.

Ví dụ 14. Giải bài toán quy hoạch sau

$$f = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & & = & 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 & + x_5 & = & 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & = & 20 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,5}.$$

Bài toán này đã có một ẩn cơ sở là x_5 nên ta chỉ cần thêm hai ẩn giả là $x_6, x_7 \geq 0$ để được bài toán (M).

$$\overline{f} = 2x_1 + x_2 - x_3 + Mx_6 + Mx_7 \to \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_7 = 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ \forall j = \overline{1,7}.$

Bài toán được thể hiện trên bảng đơn hình như sau

Hệ số	ACS	0 SHTD	2 x_1	1 x_2	-1 x_3	0 x_4	0 x_5
M	x_6	12	-4	-1	**2**	-1	0
0	x_5	10	-2	2	-1	0	1
M	x_7	20	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0
	$\overline{f}$	0	-2	-1	1	0	0
		32	-3	-3	$\frac{3}{2}$	-1	0

Hàng cuối chỉ có một số hạng dương ($\frac{3}{2}M + 1 > 0$) nên ta chọn cột x_3 với phần tử trục xoay trên hàng 1. Biến đổi $(1) := \frac{1}{2}(1)$; $(2) := (2) + (1)$; $(3) := (3) + \frac{1}{2}(1)$; $(4) := (4) - (1)$ và $(5) := (5) - \frac{3}{2}(1)$, ta được

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	6	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_5	16	-4	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
x_7	23	0	$-\frac{9}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
$\overline{f}$	-6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
	23	0	$-\frac{9}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0

Hàng cuối (hệ số hàm mục tiêu) gồm toàn số < 0 (kể cả hệ số của x_4 là $-\frac{1}{4}M+\frac{1}{2}<0$ vì M lớn). Do đó, bài toán (M) có phương án tối ưu là $\bar{X}=(0,0,6,0,16,0,23)$. Trong phương án tối ưu này, có ẩn giả $x_7=23>0$ nên bài toán gốc không có phương án và do đó không có phương án tối ưu.

6. CÁCH TÌM TẤT CẢ CÁC PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

6.1. Định lý: Biểu diễn

Bài toán có các phương án cực biên tối ưu $x^1, x^2, \ldots, x^k$ và các vectơ chỉ phương của các cạnh vô hạn tối ưu là $z^1, z^2, \ldots, z^m$ thì phương án tối ưu của bài toán là

$$x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j z^j \ ,\forall\alpha_i\ge 0\ ,\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\ ;\forall\beta_j\ge 0$$

6.2. Cách xác định các phương án tối ưu của bài toán

Xét bảng đơn hình tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính.

- Nếu $\Delta_k<0$ với mọi ẩn tự do x_k: bài toán có phương án tối ưu duy nhất.
- Nếu $\Delta_k=0$, ứng x_k là biến tự do. Khi đó lấy cột có hệ số ước lượng bằng 0 (ứng với ẩn tự do) làm cột xoay (Δ_k). Tìm tỷ số đơn hình λ.
    - Nếu $\lambda>0$ thì bài toán có phương án tối ưu khác. Lấy dòng A_r làm dòng xoay, sau đó tiến hành xoay.
    - Nếu $\lambda=0$ thì bài toán không có phương án tối ưu khác .
    - Nếu không tồn tại λ (do tất cả các phần tử trên cột $\Delta_k\le 0$) thì véctơ chỉ phương của cạnh vô hạn là tối ưu: Bài toán không có phương án tối ưu duy nhất.

Ví dụ 15. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 9/2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 14 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_6 = 20 \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Ta có bảng đơn hình sau

Hệ số	ACS	SHTD	2	7	-5	9/2	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	14	1	-1	-1	3	0	0
0	x_5	8	0	1	-4	1	1	0
0	x_6	20	0	-1	(2)	-3	0	1
	f	28	0	-9	[3]	3/2	0	0

Hàng cuối có hai số dương, ta chọn số dương $\Delta_3 = 3$, trên cột này có một số dương nên nó chính là phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: $(3) = \frac{1}{2}(3); (1) := (1) + (3);\ (2) := (2) + 4(3); (5) := (5) - 3(3)$. Ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	24	1	-3/2	0	(3/2)	0	½
x_5	48	0	-1	0	-5	1	2
x_3	10	0	-1/2	1	-3/2	0	½
f	-2	0	-15/2	0	[6]	0	-3/2

Hàng cuối có một số dương, trên cột này có một số dương nên nó chính là phần tử trục xoay. Thực hiện các phép biến đổi: $(1) = \frac{2}{3}(1); (2) := (2) + 5(1);$ $(3) := (3) + \frac{3}{2}(1); (5) := (5) - 6(1)$. Ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	16	2/3	-1	0	1	0	1/3
x_5	128	10/3	-6	0	0	1	11/3
x_3	34	1	-2	1	0	0	1
f	-98	-4	-3/2	0	0	0	-7/2

Trong bảng 3, ta thấy các $\Delta_k \le 0$; $\forall k = \overline{1,6}$. Phương án hiện hành là tối ưu. Bài toán có phương án cực biên tối ưu là $x^* = (0,0,34,16,128,0)$ với $f_{min} = -98$. Bài toán này có nghiệm tối ưu duy nhất vì $\Delta_k < 0$ với mọi biến tự do $x_k; k \in \{1,2,6\}$.

Ví dụ 16. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 7 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Bảng đơn hình

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	4	-1	(2)	0	1	0
x_5	5	1	1	0	0	1
x_3	7	2	0	1	0	0
f	0	-1	[2]	0	0	0

Hàng cuối có một số dương, trên cột này có hai số dương ta chọn phần tử trục xoay nằm ở hàng 1. Thực hiện các phép biến đổi: $(1) = \frac{1}{2}(1)$; $(2) := (2) - (1)$; $(4) := (4) - 2(1)$. Ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	2	-1/2	1	0	1/2	0
x_5	3	3/2	0	0	-1/2	1
x_3	7	2	0	1	0	0
f	-4	0	0	0	-1	0

Trong bảng đơn hình 2, ta thấy các $\Delta_k \le 0\,;\forall k = \overline{1,5}$. Bài toán có phương án cực biên tối ưu là $x^* = (0,2,7,0,3)$ với $f_{min} = -4$. Vì có $\Delta_1 = 0$, ứng với biến x_1 là ẩn tự do nên x^* không phải là phương án tối ưu duy nhất của bài toán. Muốn tìm phương án tối ưu khác, ta đưa x_1 vào cơ sở mới, và x_5 sẽ ra khỏi cơ sở, ta có bảng đơn hình mới

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	0	1	0	1/3	1/3
x_1	2	1	0	0	-1/3	2/3
x_3	3	0	0	1	2/3	-4/3
f	-4	0	0	0	-1	0

Ta lại có phương án cực biên tối ưu khác là $\overline{x}^* = (2,3,3,0,0)\,; f_{min} = -4$. Nếu tiếp tục tính toán với việc đưa vec tơ x_5 vào cơ sở vì $\Delta_5 = 0$, ứng với biến x_5 là ẩn tự do v.v. , ta lại có bảng đơn hình mới và lại tìm được phương án tối ưu mới. Vậy ta có tập phương án tối ưu là

$$
\begin{aligned}
S &= \{x = \alpha x^* + (1-\alpha)\overline{x}^* \,/\, 0 \le \alpha \le 1\} \\
&= \{x = \alpha(0,2,7,0,3) + (1-\alpha)(2,3,3,0,0) \,/\, 0 \le \alpha \le 1\} \\
&= \{x = (2-2\alpha; 3-\alpha; 3+4\alpha, 0, 3\alpha) \,/\, 0 \le \alpha \le 1\}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 17. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$
f(x) = 20x_1 + 33x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 2x_5 \to \min
$$

$$
\begin{cases}
x_1 - 3/2x_2 \qquad\qquad - x_4 + 1/2x_5 = 15/2 \\
\qquad 7/2x_2 + x_3 + 2x_4 - 1/2x_5 = 9/2 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad - 2x_4 \qquad\quad + x_6 = 0 \\
\qquad\qquad x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,6}
\end{cases}
$$

Bảng đơn hình

ACS	Hệ số	SHTD	20	33	18	18	2	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	20	15/2	1	-3/2	0	-1	1/2	0
x_3	18	9/2	0	7/2	1	2	-1/2	0
x_6	0	0	0	1	0	-2	0	1
f		-98	0	0	0	-2	-1	0

Trong bảng đơn hình này, ta thấy các $\Delta_k \le 0\,;\forall k = \overline{1,6}$. Bài toán có phương án cực biên tối ưu là $x^* = \left(\frac{15}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 0, 0\right)$ với $f_{min} = -4$. Vì có $\Delta_2 = 0$, ứng với biến x_2 là ẩn tự do nên x^* không phải là phương án tối ưu duy nhất của bài toán. Bài toán không có phương án tối ưu khác mặc dù ẩn cơ sở có thay đổi.

Ví dụ 18. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 4x_4 - 2x_5 - 4x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 1/4x_2 - 3x_3 + 1/2x_4 = 3/2 \\ 3/4x_2 - 4x_3 - 1/2x_4 + x_5 = 7/2 \\ -1/4x_2 - x_3 + 1/2x_4 + x_6 = 1/2 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

ACS	Hệ số	SHTD	7	2	-9	4	-2	-4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	7	3/2	1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{1}{2}$	0	0
x_5	-2	7/2	0	$\frac{3}{4}$	-4	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_6	-4	½	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	1
f		3/2	0	-3/4	0	-3/2	0	0

Trong bảng đơn hình này, ta thấy các $\Delta_k \le 0; \forall k = \overline{1,6}$. Bài toán có phương án cực biên tối ưu là $x^* = \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ với $f_{min} = \frac{3}{2}$. Vì có $\Delta_3 = 0$, ứng với biến x_3 là ẩn tự do nên x^* không phải là phương án tối ưu duy nhất của bài toán. Vectơ vô hạn $z = (3, 0, 1, 0, 4, 1)$.

Tập phương án tối ưu

$$x(\alpha) = x^* + \alpha z = \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) + \alpha(3, 0, 1, 0, 4, 1)$$

$$x(\alpha) = \left(\frac{3}{2} + 3\alpha, 0, \alpha, 0, \frac{7}{2} + 4\alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right),\ \alpha \ge 0.$$

7. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN SUY BIẾN, HIỆN TƯỢNG XOAY VÒNG VÀ CÁCH KHẮC PHỤC.

Khi thực hiện thuật toán đơn hình, để đổi ẩn cơ sở, ta căn cứ vào việc tính toán

$$\lambda = \min\left\{\frac{b_k}{a_{k,j}} \,\middle|\, a_{k,j} > 0\right\}$$

Phương án cực biên sẽ là phương án suy biến nếu xuất hiện $\lambda = 0$ hoặc λ đạt tại nhiều chỉ số hoặc λ không tồn tại do các $a_{k,j} \le 0$.

a) Trường hợp λ không tồn tại

Ví dụ 19. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

ACS	Hệ số	SHTD	1	-1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	2	1	-2	1	0	0
x_4	0	6	-3	0	0	1	0
x_5	0	0	-2	0	0	0	1
	f	0	-1	1	0	0	0

Ta thấy $x = (0, 0, 2, 6, 0)$ là phương án cực biên suy biến. Mặt khác do $\Delta_2 = 1 > 0$ và các phần tử trên cột này đều ≤ 0, nên λ không tồn tại, bài toán không có phương án tối ưu.

b) Trường hợp $\lambda = 0$ ta thực hiện thuật toán đơn hình bình thường, tức véctơ A_r ứng với λ vẫn bị loại khỏi cơ sở. Trong trường hợp này, phương án cực biên và giá trị hàm mục tiêu vẫn không đổi, chỉ có cơ sở của nó thay đổi. Vì thế sau một số phép biến đổi đơn hình ta sẽ gặp lại cơ sở ban đầu. Đó là hiện tượng xoay vòng. Khi đó thuật toán không thể kết thúc.

c) Trường hợp λ đạt được tại nhiều chỉ số, ta loại khỏi cơ sở cũ một véctơ trong các véc tơ ứng với $\lambda = 0$ theo quy tắc ngẫu nhiên.

Ví dụ 20. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây

$$f(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 - 5,5x_2 - 2,5x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ 0,5x_1 - 1,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Để giải ví dụ này ta làm theo quy tắc: Tại một bảng đơn hình nào đó nếu có nhiều véctơ cùng đạt tiêu chuẩn ra khỏi cơ sở đang xét, thì ta sẽ chọn đưa ra khỏi cơ sở véctơ có chỉ số nhỏ nhất.

ACS	SHTD	-10	57	9	24	0	0	0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	**(0,5)**	-5,5	-2,5	9	1	0	0
x_6	0	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0
x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
f	0	**(10)**	-57	-9	-24	0	0	0

Hàng cuối có một số dương trên cột này có hai số dương, ta chọn phần từ trục xoay ở hàng 1 vì có chỉ số của ẩn cơ sở nhỏ hơn.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	-11	-5	18	2	0	0
x_6	0	0	**(4)**	2	-8	-1	1	0
x_7	1	0	11	5	-18	-2	0	1
f	0	0	**(53)**	41	-204	-20	0	0

Ta thấy ở bảng 2 thì $\lambda = 0$, x_6 ra khỏi cơ sở.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	**(0,5)**	-4	-0,75	2,75	0
x_2	0	0	1	0,5	-2	-0,25	0,25	0
x_7	1	0	0	-0,5	4	0,75	2,75	1
f	0	0	0	**(14,5)**	-98	-6,75	-13,25	0

Hàng cuối có một số dương trên cột này có hai số dương, $(\lambda = 0)$, ta chọn phần từ trục xoay ở hàng 1 vì có chỉ số của ẩn cơ sở nhỏ hơn.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	0	2	0	1	-8	-1,5	5,5	0
x_2	0	-1	1	0	**(2)**	0,5	-2,5	0
x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
f	0	-29	0	0	**(18)**	15	-93	0

Ta thấy ở bảng 4 thì $\lambda = 0$, x_2 ra khỏi cơ sở.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	0	-2	4	1	0	**(0,5)**	-4,5	0
x_4	0	-0,5	0,5	0	1	0,25	-1,25	0
x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
f	0	-20	-9	0	0	**(10,5)**	-70,5	0

Hàng cuối có một số dương trên cột này có hai số dương, $(\lambda = 0)$, ta chọn phần từ trục xoay ở hàng 1 vì có chỉ số của ẩn cơ sở nhỏ hơn.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	-4	8	2	0	1	-9	0
x_4	0	0,5	-1,5	-0,5	1	0	**(1)**	0
x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
f	0	22	-93	-21	0	0	**(24)**	0

Ta thấy ở bảng 4 thì $\lambda = 0$, x_4 ra khỏi cơ sở.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	0,5	-5,5	-2,5	9	1	0	0
x_6	0	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0
x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
f	0	10	-57	-9	-24	0	0	0

Bảng đơn hình ở bước lặp thứ 7 trùng với bảng đơn hình ở bước đầu tiên, bài toán xoay vòng. Hiện tượng xoay vòng này hiếm khi xảy ra. Để tránh hiện tượng này ta có thể áp dụng quy tắc chỉ số bé nhất của R.G.Bland như sau:

+ Nếu hàng cuối có nhiều số dương, ta chọn số dương **có chỉ số nhỏ nhất**.

+ Nếu có nhiều dòng để chọn làm dòng xoay chọn dòng **có chỉ số nhỏ nhất**.

Trong ví dụ này ở bảng 6 ta sẽ không chọn cột A6 làm cột xoay mà ta sẽ chọn cột A1 theo quy tắc của Bland, và chọn dòng A4 làm dòng xoay. Ta có bảng đơn hình mới như sau:

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	0	-4	-2	8	1	-1	0
x_1	0	1	-3	-1	2	0	2	0
x_7	1	0	3	**(1)**	-2	0	-2	1
f	0	0	-27	**(1)**	-44	0	-20	0

Hàng cuối có một số dương trên cột này có một số dương nên nó chính là phần tử trục xoay.

ACS	SHTD	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	2	0	2	0	4	1	-5	2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
x_3	1	0	3	1	-2	0	-2	1
f	-1	0	-30	0	-42	0	-18	-1

Bài toán có phương án tối ưu là $x^* = (1,0,1,0,2,0,0)$ với $f_{min} = -1$.

Hiện tượng xoay vòng cũng hiếm khi xảy ra, vì vậy trong giới hạn của chương trình học, chúng ta không xét bài toán có hiện tượng xoay vòng, các bạn nên đọc tham khảo để tìm hiểu thêm.

BÀI TẬP

1. Lập mô hình bài toán

1.1. Nhân dịp tết trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh "Trăng" muốn sản xuất 3 loại bánh : đậu xanh, thập cẩm và bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất 3 loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, đậu, bột, trứng, mứt, lạp xưởng, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 500kg, đậu là 300kg, các nguyên liệu khác muốn bao nhiêu cũng có. Lượng đường, đậu cần thiết và lợi nhuận thu được trên một cái bánh mỗi loại cho trong bảng sau

Bánh Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo
Đường (g)	60	40	70
Đậu (g)	80	0	40
Lợi nhuận (đồng)	2000	1700	1800

Cần lập kế hoạch sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng lợi nhuận thu được là lớn nhất nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết.

1.2. Một xí nghiệp dệt hiện có 3 loại sợi : Cotton, Katé, Polyester với khối lượng tương ứng là 3; 2,5; 4,2 (tấn). Các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn. Xí nghiệp có thể sản xuất ra 3 loại vải A, B, C (với khổ bề rộng nhất định) với mức tiêu hao các loại sợi để sản xuất ra một mét vải các loại cho trong bảng sau

Loại vải Loại sợi(g)	A	B	C
Cotton	200	200	100
Katé	100	200	100
Polyester	100	100	200

Biết lợi nhuận thu được khi sản xuất một mét vải các loại A, B, C tương ứng là 350, 480, 250 (đồng). Sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết với số lượng không hạn chế, nhưng tỷ lệ về số mét vải của B và C phải là 1 : 2.

Hãy xây dựng bài toán tìm kế hoạch sản xuất tối ưu.

1.3. Một trại chăn nuôi định nuôi 3 loại bò : bò sữa, bò cày và bò thịt. Số liệu điều tra được cho trong bảng sau, với đơn vị tính là ngàn đồng / con.

Loại bò Chi phí	Bò sữa	Bò cày	Bò thịt	Dự trữ
Vốn	123	127	162	7020
Chi phí chăn nuôi	18	15	15	800
Lời	59	49	57	

Tìm số bò mỗi loại cần nuôi sao cho tổng tiền lời là lớn nhất. Biết rằng số bò sữa không quá 18 con.

1.4. Một đội sản xuất dự định dùng 31 sào đất để trồng bắp cải, cà chua, đậu, khoai tây, hành. Các số liệu cho trong bảng sau

Tài nguyên	Dự trữ	Bắp cải	Cà chua	Đậu	Khoai tây	Hành
Lao động (công/sào)	1892	79	55	23	26	35
Chi phí (ngàn đồng/sào)	1828	38	22	31	63	50
Lời (ngàn đồng/sào)		376	128	104	177	310

Tìm phương án phân phối đất trồng các loại rau để được lời nhiều nhất.

1.5. Để sản xuất 3 loại sản phẩm I, II, III, người ta cần dùng 4 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3, N_4, với các số liệu được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	Dự trữ (kg)	Sản phẩm I	Sản phẩm II	Sản phẩm III
N_1	22	2	3	1
N_2	16	2	1	0
N_3	18	0	0	3
N_4	21	3	3	4
Thu nhập		7	5	6

Tìm phương án phân phối sản xuất sao cho tổng thu nhập của xí nghiệp là lớn nhất.

1.6. Một chủ nông trại có quyền sở hữu 100 mẫu đất dự định trồng 3 loại cây A, B, C. Chi phí hạt giống tương ứng cho 3 loại cây A, B, C là 40$, 20$, 30$. Số tiền tối đa có thể chi cho việc mua hạt giống là 3200$. Số ngày công chăm sóc cho các loại cây A, B, C trên một mẫu tương ứng là 1, 2, 1. Số ngày công tối đa có thể có là 160. Nếu lợi nhuận trên một mẫu của mỗi loại cây cho bởi : A là 100$, B là 300$, C là 200$, thì phải trồng mỗi loại cây bao nhiêu mẫu để thu lợi nhuận tối đa.

1.7. Một hãng sản xuất máy vi tính có hai phân xưởng lắp ráp A, B và hai đại lý phân phối I, II. Xưởng A có thể ráp tối đa 700 máy/tháng và xưởng B ráp tối đa 900 máy/tháng. Đại lý I tiêu thụ ít nhất 500 máy/tháng và đại lý II tiêu thụ ít nhất 1000 máy/tháng. Cước phí vận chuyển một máy từ các xưởng đến các đại lý cho trong bảng sau

	Đại lý I	Đại lý II
Xưởng A	6$	5$
Xưởng B	4$	8$

Tìm kế hoạch vận chuyển tối ưu để tổng cước phí vận chuyển máy từ các xưởng đến các đại lý phân phối cực tiểu.

1.8. Có 2 nơi cung cấp khoai tây I và II theo khối lượng lần lượt là 100 tấn và 200 tấn. Có 3 nơi tiêu thụ khoai tây: A, B, C với yêu cầu tương ứng là 75 tấn, 125 tấn và 100 tấn. Cước phí vận chuyển (ngàn/tấn) vận chuyển từ các nơi cung cấp đến nơi tiêu thụ được cho trong bảng sau

Tiêu thụ Cung cấp	A	B	C
I	10	14	30
II	12	20	17

Muốn chuyên chở khoai tây với tổng cước phí nhỏ nhất. Lập mô hình bài toán.

1.9. Một người có số tiền là 100 tỷ đồng dự định đầu tư vào các loại hình sau đây:

- Gửi tiết kiệm không kỳ hạn với lãi suất là 6,5%/năm.
- Gửi tiết kiệm có kỳ hạn với lãi suất 8,7%/năm.
- Mua tín phiếu với lãi suất là 10%/năm.
- Cho doanh nghiệp tư nhân vay với lãi suất lá 13%/năm.

Để tránh rủi ro, người này quyết định đầu tư theo các chỉ dẫn của nhà tư vấn đầu tư như sau:

- Không cho doanh nghiệp tư nhân vay quá 20% số vốn.

- Số tiền mua tín phiếu không vượt quá tổng số tiền đầu tư vào 3 loại hình kia.
- Đầu tư ít nhất là 30% tổng số tiền vào gửi tiết kiệm có kỳ hạn và mua tín phiếu.
- Tỷ lệ tiền gửi tiết kiệm không kỳ hạn trên tiền tiết liệm có kỳ hạn không quá 1/3.
- Người này cho vay toàn bộ số tiền.

Hãy lập mô hình toán , xác định phương án đầu tư tối ưu để người này đạt được lợi nhuận cao nhất, theo đúng chỉ dẫn của nhà đầu tư.

1.10. Một công ty có kế hoạch quảng cáo một loại sản phẩm do công ty sản xuất trong thời gian một tháng với tổng chi phí là 100 triệu đồng. Các phương tiện được chọn để quảng cáo sản phẩm là : truyền hình, báo và phát thanh với số liệu được cho bởi bảng sau

Phương tiện quảng cáo	Chi phí mỗi lần quảng cáo (triệu đồng)	Số lần quảng cáo tối đa trong tháng	Dự đoán số người xem trong mỗi lần
Truyền hình (1 phút)	1,5	60	15000
Báo (1/2 trang)	1	26	30000
Phát thanh (1 phút)	0,5	90	9000

Vì lý do chiến lược tiếp thị nên công ty yêu cầu phải có ít nhất 30 lần quảng cáo trên truyền hình trong tháng. Hãy lập mô hình bài toán sao cho phương án quảng cáo sản phẩm của công ty là tối ưu ?

2. Đưa các bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc

2.1. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_3 \le 1 \\ \qquad x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

2.2. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \leq 0.$

2.3 $f(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

2.4 $f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & \leq & 16 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & \geq & -8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0; x_3 \leq 0.$

2.5 $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$

2.6 $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 \quad + x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0.$

2.7 $f(x) = 6x_1 + 8x_2 + 8x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 & \le & 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & \ge & 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \ge & -7 \end{cases}$$

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \le 0, x_3 \ge 0.$

2.8 $f(x) = 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 & \ge & 70 \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 & \le & 50 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 & \le & 60 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

2.9 $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 & \le & 84 \\ 2x_1 + 3x_2 & \le & 24 \\ 4x_1 + 3x_2 & \le & 36 \end{cases}$$

$0 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 7.$

2.10 $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & \le & 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \ge & 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

2.11 $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 6x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}$$

$x_1 \le 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \ge 0.$

3. Giải các quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp hình học

3.1. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ 5x_1 & - & x_2 & \leq & 15 \\ & x_i \geq 0 & ,i = \overline{1,2} \end{cases}$$

3.2. $f(x) = x_1 + 2x_2 \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 6x_1 & + & x_2 & \geq & 18 \\ x_1 & + & 4x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ & x_i \geq 0 & ,i = \overline{1,2} \end{cases}$$

3.3. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3.4. $f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3.5. $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3.6. $f(x) = 3x_1 + 7x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3.7. Người ta thành lập một cầu hàng không vận chuyển 1400 hành khách và 90 tấn hàng. Có hai loại máy bay :

- Loại A : 10 chiếc, mỗi chiếc chở 200 người và 6 tấn hàng, tiền thuê 4 triệu/chiếc.
- Loại B : 9 chiếc, mỗi chiếc chở 100 người và 15 tấn hàng, tiền thuê 1 triệu/chiếc.

Hỏi phải thuê bao nhiêu máy bay mỗi loại để chi phí là thấp nhất. Biết rằng ít nhất phải thuê 4 máy bay loại A.

3.8. Một tổ hợp sản xuất hai loại hàng :

- Mỗi sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ làm, đem lại mức lãi 4000 đồng/sản phẩm.

- Mỗi sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ làm, đem lại mức lãi 3000 đồng/sản phẩm.

Biết tổ hợp có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm. Hỏi tổ hợp phải sản xuất mỗi loại hàng bao nhiêu sản phẩm để đạt lợi nhuận cao nhất ?

4. Chứng minh bài toán giải được, tìm phương án, phương án cực biên, phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

4.1. Cho bài toán

$$f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \le 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,4}.$$

Chứng minh bài toán trên giải được.

4.2. Cho bài toán

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 \le 8 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 20 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

Vectơ $x_0 = (6, 0, 10, 0)$ có phải là phương án, phương án cực biên ?

4.3. Cho bài toán sau

$$f(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \ge -2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 \ge -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1 \le 0;\ x_3, x_4 \ge 0.$$

a. Chứng minh bài toán trên giải được.

b. Bài toán có phương án cực biên tối ưu không? Vì sao.

5. Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

5.1. $f(x) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 3x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ -\frac{3}{5}x_1 + x_5 + 2x_6 = 11 \\ x_3 + x_6 = 5 \\ \frac{3}{5}x_1 + x_2 - \frac{6}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Đáp án : $x = (5, 7, 0, 0, 4, 5)$.

5.2. $f(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$

Đáp số : Trị số $f(x)$ không bị chặn trên tập phương án.

5.3. $f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_5 - x_6 + x_7 = 40 \\ -2x_2 + x_3 - x_5 + 3x_6 - x_7 = 10 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_4 + x_5 + 2x_6 + x_7 = 60 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$

Đáp số : Trị số $f(x)$ không bị chặn trên tập phương án.

5.4. $f(x) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

Đáp số : $x = (2, 6, 0, 6)$

5.5. $f(x) = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 4x_6 + 3x_7 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 = 26 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 20 \\ -x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 = 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$

Đáp số : Bài toán không có phương án.

5.6. $f(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 + x_7 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 2x_7 = 6 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + x_6 - 4x_7 = 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 + x_6 + 5x_7 = 3 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_7 = 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$

Đáp số : $x = (0, 6, 14, 0, 0, 0, 1)$.

5.7. $f(x) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 + x_5 = 21 \\ x_3 + x_6 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$

Đáp số : $x = (5, 15, 0, 0, 6, 10)$.

6. Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

6.1. $f(x) = -4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq -60 \\ -x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

Đáp số : $x = (0, 8, 6)$.

6.2. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \le 19 \\ \quad 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \le 17 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$

Đáp số : $x = (0, 0, 1, 6)$.

6.3. $f(x) = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \le 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$

Đáp số :

6.4. $f(x) = 2x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \le 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 \le 1 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ \forall j \ne 3; \ x_3 \le 0.$

Đáp số : $x = (0, 0, -2, 1)$.

6.5. $f(x) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \le 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 \le 9 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$

Đáp số : $x = (5, \ 0, \ 0, \ 4)$.

7. Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

7.1. $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,4}.$

Đáp số : $x = \left(0,\ 14,\ 6,\ 5\ \right).$

7.2. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 \geq 64 \\ -\dfrac{5}{2}x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 \leq 27 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$

Đáp số : $x = \left(24,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0\right).$

7.3. $f(x) = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - \dfrac{10}{3}x_4 + 5x_5 = 42 \\ -2x_1 + 2x_3 - \dfrac{2}{3}x_4 + 2x_5 \leq 18 \\ 5x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 0 \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 + 3x_5 \geq 21 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$

Đáp số : $x = \left(1,\ 10,\ 10,\ 0,\ 0\right).$

7.4. $f(x) = -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 44 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 28 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \le 22 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

Đáp số : $x = (0,\ 8,\ 14,\ 0,\ 48)$.

7.5. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -12 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 10 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 \le 26 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \ge 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

Đáp số : Bài toán không có phương án tối ưu.

8. Bài tập tổng hợp

8.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \ge 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \le 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

a. Chứng minh rằng $x_0 = \left(\frac{11}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$ là phương án cực biên. Xuất phát từ x_0, tìm lời giải của bài toán bằng phương pháp đơn hình.

b. Thay điều kiện $x_2 \ge 0$ bởi $x_2 \le 0$. Tìm lời giải của bài toán.

Đáp số : a) $x = (3,\ 0,\ 1,\ 0)$;

b) Bài toán không có lời giải.

8.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3}.$$

a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Có kết luận gì về lời giải của bài toán nếu $f(x) \to \max$. Hãy chỉ ra tập phương án mà $f(x)$ tăng vô hạn.

Đáp số : a) $x = \left(\frac{26}{7}, 0, \frac{20}{7}\right)$; *b) Bài toán không có lời giải.*

$$x(\theta) = \left(\frac{26}{7}, 0, \frac{20}{7} + \frac{\theta}{2}\right), \ (\theta \geq 0).$$

8.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 38 \\ 5x_1 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ -4x_1 + 2x_3 + 5x_4 \leq 56 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \geq 16 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5}.$$

a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Tìm phương án tối ưu của bài toán khi có thêm điều kiện $f(x) \leq 20$.

Đáp số : a) Bài toán không có lời giải

b) $x = (120, 54, 232, 0, 0)$

9. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình

9.1. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 & = & 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 & \le & 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 16 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$.

9.2. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 8 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$.

9.3. $f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 10 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$.

9.4. $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & \ge & 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & \ge & 8 \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 & \ge & 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$.

9.5. $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & \ge & 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 & \ge & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \ge & 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$