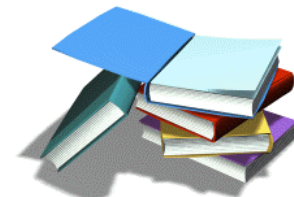




TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING
KHOA CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN – THỐNG KÊ

BÀI GIẢNG
LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN

Giảng viên
ThS. Lê Trường Giang





LÝ THUYẾT XÁC SUẤT & THỐNG KÊ TOÁN

Chương 4

VECTOR NGẪU NHIÊN



Chương 4. Vector ngẫu nhiên

- §1. Phân phối xác suất của vector ngẫu nhiên rời rạc
 - §2. Phân phối xác suất của vector ngẫu nhiên liên tục
-

§1. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA VECTOR NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

1.1 Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

1.2. Phân phối xác suất thành phần (phân phối lề)

1.3. Phân phối xác suất có điều kiện

1.1 Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots	y_n	Tổng dòng
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}	$p_{i\bullet}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}	$p_{m\bullet}$
Tổng cột	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	\dots	$p_{\bullet j}$	\dots	$p_{\bullet n}$	1

Trong đó $P(X = x_i; Y = y_j) = p_{ij}$ và $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.

1.2. Phân phối xác suất thành phần (phân phối lẻ)

- Bảng phân phối xác suất của X

X	x_1	x_2	\dots	x_m
P	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	\dots	$p_{m\bullet}$

Trong đó $p_{i\bullet} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in}$
(tổng dòng i của bảng phân phối xác suất đồng thời).

Kỳ vọng của X là

$$EX = x_1 p_{1\bullet} + x_2 p_{2\bullet} + \dots + x_m p_{m\bullet}$$

- **Bảng phân phối xác suất của Y**

Y	y_1	y_2	\cdots	y_n
P	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	\cdots	$p_{\bullet n}$

Trong đó $p_{\bullet j} = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{mj}$
(tổng cột j của bảng phân phối xác suất đồng thời).

Kỳ vọng của Y là

$$EY = y_1 p_{\bullet 1} + y_2 p_{\bullet 2} + \cdots + y_n p_{\bullet n}.$$

VD 1. Phân phối xác suất đồng thời của vector ngẫu nhiên (X, Y) cho bởi bảng:

$X \backslash Y$	1	2	3
6	0,10	0,05	0,15
7	0,05	0,15	0,10
8	0,10	0,20	0,10

1) Tính $P(X = 6)$ và $P(X \geq 7, Y \geq 2)$.

2) Lập bảng phân phối xs thành phần và tính EX, EY .

Ví dụ 1B (BTN) Chọn ngẫu nhiên 2 bi từ hộp có 3 bi đỏ, 2 bi vàng, 4 bi xanh. Gọi X, Y tương ứng là số bi đỏ và số bi vàng có trong 2 bi lấy ra.

- a) Tìm phân phối xác suất đồng thời của X và Y .
- b) Tính $P\{(X, Y) \in A\}$ với $A = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$.
- c) Tìm phân phối xác suất biên của X , của Y .

1.3. Phân phối xác suất có điều kiện

$$P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

$$P(Y=y_j | X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

- Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $Y = y_j$:

X	x_1	x_2	\dots	x_m
$P \quad X=x_i Y=y_j$	$\frac{p_{1j}}{p_{\bullet j}}$	$\frac{p_{2j}}{p_{\bullet j}}$	\dots	$\frac{p_{mj}}{p_{\bullet j}}$
	$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet j}$	\dots	$p_{\bullet j}$

Kỳ vọng của X với điều kiện $Y = y_j$ là:

$$EX = \frac{1}{p_{\bullet j}} (x_1 p_{1j} + x_2 p_{2j} + \dots + x_m p_{mj}).$$

- Bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện $X = x_i$:

Y		y_1	y_2	\dots	y_n
P	$Y = y_j X = x_i$	$\frac{p_{i1}}{p_{i\bullet}}$	$\frac{p_{i2}}{p_{i\bullet}}$	\dots	$\frac{p_{in}}{p_{i\bullet}}$
		$p_{i\bullet}$	$p_{i\bullet}$		$p_{i\bullet}$

Kỳ vọng của Y với điều kiện $X = x_i$ là:

$$EY = \frac{1}{p_{i\bullet}} (y_1 p_{i1} + y_2 p_{i2} + \dots + y_n p_{in}).$$

VD 2. Cho bảng phân phối xs đồng thời của (X, Y) :

$X \backslash Y$	1	2	3
6	0,10	0,05	0,15
7	0,05	0,15	0,10
8	0,20	0,10	0,10

- 1) Lập bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $Y = 2$ và tính kỳ vọng của X .
- 2) Lập bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện $X = 8$ và tính kỳ vọng của Y .

Ví dụ 2B(BTN): Thống kê dân số của một vùng theo hai chỉ tiêu: giới tính X; học vấn Y được kết quả cho trong bảng sau

X \ Y	Thất học 0	Phổ thông 1	Sau phổ thông
Nam: 0	0.1	0.25	0.16
Nữ: 1	0.15	0.22	0.12

- Lập bảng phân phối xác suất của học vấn; giới tính.
- Học vấn có độc lập với giới tính không?
- Tìm xác suất để chọn ngẫu nhiên một người của vùng thì người đó không bị thất học.
- Lập bảng PPXS học vấn của nữ; tính tb học vấn của nữ.
- Tìm tỉ lệ nữ có học vấn không vượt quá phổ thông.

§2. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA VECTOR NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

2.1. Hàm mật độ đồng thời của (X, Y)

2.2. Hàm mật độ thành phần

2.3. Hàm mật độ có điều kiện

2.1. Hàm mật độ đồng thời của (X, Y)

- Hàm hai biến $f(x, y) \geq 0$ xác định trên \mathbb{R}^2 được gọi là **hàm mật độ** của vector ngẫu nhiên (X, Y) nếu:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

- Xác suất của vector (X, Y) trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ là:

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2.2. Hàm mật độ thành phần

- Hàm mật độ của X là:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

- Hàm mật độ của Y là:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Chú ý

Khi tìm hàm $f_X(x)$, ta lấy tích phân hàm $f(x, y)$ theo biến y và điều kiện x phải độc lập đối với y .

Tìm hàm $f_Y(y)$, ta làm tương tự.

Trung bình thành phần

$$E f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx, \quad E f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy.$$

2.3. Hàm mật độ có điều kiện

- Hàm mật độ có điều kiện của X khi biết $Y = y$ là:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

- Hàm mật độ có điều kiện của Y khi biết $X = x$ là:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

VD 1. Cho hàm $f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y, & \text{khi } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$

- 1) Chứng tỏ vector (X, Y) có hàm mật độ là $f(x, y)$.
- 2) Tính xác suất $P\left(Y \geq \frac{1}{2}X\right)$.
- 3) Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y .
- 4) Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_X(x | y), f_Y(y | x)$.
- 5) Tính xác suất $P\left(Y < \frac{1}{8} \mid X = \frac{1}{4}\right)$.

VD 2. Cho hàm mật độ đồng thời của vector (X, Y) là:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & \text{khi } 0 < x < 1; 0 < y < 1 - x, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

- 1) Tính trung bình thành phần của X, Y .
- 2) Tính xác suất $P(X > 0,3 | Y = 0,5)$.



XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN!

