TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING
KHOA CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN – THỐNG KÊ

BÀI GIẢNG XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương 4

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Bài 3

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

Giảng viên
Ths Lê Trường Giang


Trưa nay
Tây Ninh
TPHCM
32 - 33°C
Cà Mau


200000

Bài 3.
Ước lượng khoảng tham số trung bình tổng thể

Cho tổng thể X có tham số trung bình $E(X) = \mu$.

Một mẫu $(x_1, x_2, \dots x_n)$ lấy ra từ tổng thể có trung bình mẫu là $\overline{x}$.

Bài toán: ***Giả sử trung bình tổng thể μ chưa biết, hãy tìm khoảng $(\mu_1;\mu_2)$ chứa μ sao cho $P(\mu_1 < \mu < \mu_2) = \gamma$ với γ là độ tin cậy cho trước.***

Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể

Trường hợp 1: Phương sai tổng thể σ^2 đã biết và kích thước mẫu $n \geq 30$ (hoặc kích thước mẫu $n < 30$ và X có phân phối chuẩn)

Xây dựng khoảng ước lượng

Theo định lý giới hạn trung tâm, ta có $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Ta đi tìm z thỏa $P(-z < Z < z) = \gamma \quad (1)$

HƯỚNG DẪN XÂY DỰNG KHOẢNG ƯỚC LƯỢNG

Ta có $P(-z < Z < z) = \gamma$

$$\Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{z-0}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{-z-0}{1}\right) = \gamma \Leftrightarrow \Phi_0(z) = \frac{\gamma}{2}\left(\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right).$$

Đặt $\Phi_0(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \alpha.$

Khi đó ta suy ra $z = z_{\frac{\gamma}{2}}$ thỏa $\Phi_0\left(z_{\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{\gamma}{2}.$

Vậy từ (1) ta có

$$P\left(-z_{\frac{\gamma}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\gamma}{2}}\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(\overline{X} - z_{\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

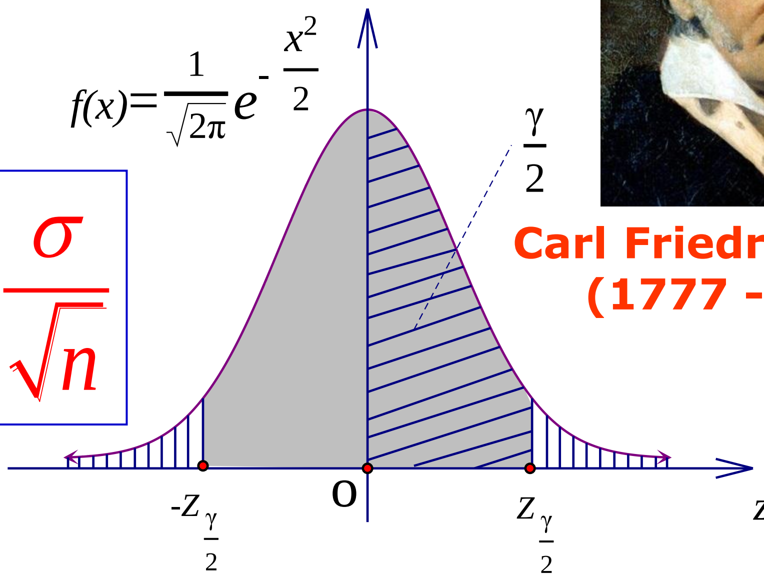
Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể

Trường hợp 1: Phương sai tổng thể σ^2 **đã biết và kích thước mẫu** $n \geq 30$

(hoặc kích thước mẫu $n < 30$ **và X có phân phối chuẩn)**

Khoảng ước lượng của μ với độ tin cậy γ

$$\left(\bar{X} - \varepsilon, \bar{X} + \varepsilon\right); \quad \varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

3.2. Khoảng ước lượng một phía

Khoảng tin cậy tối đa của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \le \bar{x} + z_{\gamma-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Khoảng tin cậy tối thiểu của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \ge \bar{x} - z_{\gamma-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1

Giả sử chiều cao của các bạn nữ sinh viên Trường Đại học Tài Chính –Marketing tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 5 cm Chọn ngẫu nhiên 64 bạn sinh viên nữ, người ta tính được chiều cao trung bình là 160 cm Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng chiều cao trung bình của các bạn sinh viên nữ UFM.

Hướng dẫn tra bảng 2

Bảng 2 : Bảng giá trị tích phân Laplace (hàm phân phối xs Gauss)

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$\gamma = 0.95$

$$\Phi_0\left(z_{\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{\gamma}{2} = 0,475$$

$$z_{\frac{\gamma}{2}} = z_{0,475} = 1,96$$

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0389	0438	0478	0517	0557	0396	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	1492	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4793	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4838	4846	4850	4854	4857

Ví dụ 1

Hướng dẫn

Bước 1. Bài toán thuộc trường hợp 1 ($n \geq 30$ và biết σ^2)

Bước 2: Trên mẫu cụ thể ta có

$$\overline{x} = 160\,cm; \qquad \sigma = 5\,cm$$

Bước 3: Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = z_{\frac{0,95}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96.\frac{5}{\sqrt{64}} = 1,225\,cm$$

Bước 4: Khoảng tin cậy 95% cho chiều cao trung bình

$$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right) = (158,775\,cm; 161,225\,cm)$$

Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể

Trường hợp 2: Kích thước mẫu $n \geq 30$, phương sai tổng thể σ^2 chưa biết

Khoảng ước lượng của μ với độ tin cậy γ

$$\left(\bar{X} - \varepsilon, \bar{X} + \varepsilon\right); \quad \varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}}$$

3.2. Khoảng ước lượng một phía

Khoảng tin cậy tối đa của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \le \bar{x} + z_{\gamma - \frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Khoảng tin cậy tối thiểu của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \ge \bar{x} - z_{\gamma - \frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Ví dụ 2A

Trong một đợt khảo sát về chiều cao (đơn vị m) của các bạn nữ sinh viên Trường Đại học Tài Chính – Marketing (UFM). Người ta chọn ngẫu nhiên 100 bạn sinh viên và nhận được kết quả cho trong bảng sau:

Chiều cao	(1,4; 1,5]	(1,5;1,6]	(1,6;1,7]	(1,7;1,8]	(1,8;1,9]
Số SV	10	25	40	15	10

Hãy ước lượng chiều cao trung bình của các bạn sinh viên UFM với độ tin cậy 95%?

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 2A

Hướng dẫn

Bước 1. Bài toán thuộc trường hợp 2 ($n \geq 30$ và chưa biết σ^2)

Bước 2: Trên mẫu cụ thể ta có

$$\overline{x} = 1,64\,m; \qquad s = 0,1096\,m$$

Bước 3: Độ chính xác của ước lượng

$$\varepsilon = z_{\frac{0,95}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,96.\frac{0,1096}{\sqrt{100}} = 0,0215\,m$$

Bước 4: Khoảng tin cậy 95% cho chiều cao trung bình

$$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right) = \left(1,6185\,m; 1,6615\,m\right)$$

Ví dụ 2B

Theo dõi doanh thu của một đại lý bán xăng dầu qua một số ngày thu được kết quả:

Doanh thu(triệu đồng)	11	12	13	14	15
Số ngày	3	7	10	7	4

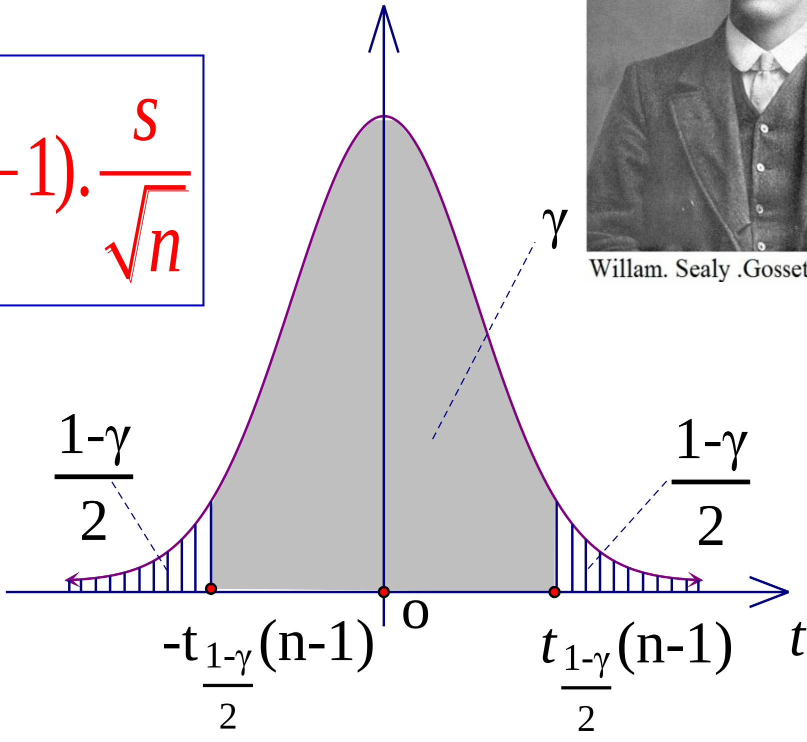
Ước lượng doanh thu trung bình tối thiểu của đại lý trên với độ tin cậy 95%?

Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể

Trường hợp 3: $n < 30$, **tổng thể** X **có phân phối chuẩn với** σ^2 **chưa biết**

Khoảng ước lượng của μ với độ tin cậy γ

$$\left(\bar{X} - \varepsilon, \bar{X} + \varepsilon\right); \quad \varepsilon = t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1).\frac{s}{\sqrt{n}}$$



Willam. Sealy .Gosset 1876 - 1937

3.2. Khoảng ước lượng một phía

Khoảng tin cậy tối đa của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \le \overline{x} + t_{1-\gamma}(n-1).\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Khoảng tin cậy tối thiểu của μ với độ tin cậy γ

$$\boxed{\mu \ge \overline{x} - t_{1-\gamma}(n-1).\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 3

Một hãng sản xuất bóng đèn đã đưa vào thử nghiệm để xác định tuổi thọ trung bình. Chọn một mẫu 20 bóng đèn cùng loại để thực nghiệm. Tuổi thọ của 20 bóng đèn được cho trong bảng sau (đơn vị nghìn giờ):

Tuổi thọ	(5 ;5,5]	(5,5 ; 6]	(6 ; 6,5]	(6,5 ; 7]
Số bóng đèn	3	6	7	4

Giả sử tuổi thọ bóng đèn tuân theo luật phân phối chuẩn, hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn với độ tin cậy 95%?

Hướng dẫn tra bảng 4

Bảng 4

Bảng phân vị Student

n bậc tự do

$$\boxed{P\left(T > t_{\alpha}(n-1)\right) = \alpha}$$

$$\gamma = 95\%;\, n-1 = 19$$

$$t_{\frac{1-\gamma}{2}}(19) = t_{0,025}(19)$$

$$P\left(T > t_{0,025}(19)\right) = 0,025$$

$$t_{0,025}(19) = 2,093.$$

n-1 \ α	0.10	0.05	0,025	0.01	0.005	0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.675	66.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.861	3.055	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.719	2,093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385

MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 3

Hướng dẫn

Bước 1. Thuộc trường hợp 3 ($n<30$, σ^2 chưa biết và X có pp chuẩn)

Bước 2. Từ mẫu tính các giá trị

$$\overline{x}=6,05; \quad s=0,497.$$

Bước 3. Độ chính xác

$$\varepsilon = t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1).\frac{s}{\sqrt{n}} = 2,093.\frac{0,497}{\sqrt{20}} = 0,233$$

Bước 4. Khoảng ước lượng cho trung bình với độ tin cậy 95%

$$\left(\overline{x}-\varepsilon;\overline{x}+\varepsilon\right)=\left(5,817;6,283\right).$$ Nghìn giờ

Các bước tìm khoảng ước lượng cho trung bình tổng thể

Bước 1: Nhận dạng bài toán.

Bước 2: Tính toán dựa trên mẫu

$\overline{x}$, tính s nếu chưa biết phương sai.

Bước 3: Tính độ chính xác ε

Bước 4: Kết luận khoảng tin cậy cho trung bình

$$\left(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon\right)$$

Bảng tóm tắt kiến thức

Bước 1	Trường hợp 1 Biết σ^2 và $n \geq 30$ Hoặc Biết σ^2, $n < 30$ và X pp chuẩn	Trường hợp 2 Chưa biết σ^2 và $n \geq 30$	Trường hợp 3 Chưa biết σ^2, $n < 30$ và X pp chuẩn
Bước 2	$\overline{x}$	$\overline{x}, s$	$\overline{x}, s$
Bước 3	$\varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	$\varepsilon = t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
Bước 4	$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right)$		

T.H	Điều kiện	Bài toán ước lượng	Khoảng ước lượng	Giá trị ε
Biết σ	$n \geq 30$ hoặc $\begin{cases} n < 30 \\ X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) \end{cases}$	Hai phía	$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		Tối thiểu (pp)	$\left(\overline{x} - \varepsilon, +\infty\right)$	$\varepsilon = z_{\gamma - \frac{1}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		Tối đa (pt)	$\left(-\infty; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = z_{\gamma - \frac{1}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Chưa biết σ	$n \geq 30$	Hai phía	$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = z_{\frac{\gamma}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
		Tối thiểu	$\left(\overline{x} - \varepsilon, +\infty\right)$	$\varepsilon = z_{\gamma - \frac{1}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
		Tối đa	$\left(-\infty; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = z_{\gamma - \frac{1}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
	$\begin{cases} n < 30 \\ X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) \end{cases}$	Hai phía	$\left(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = t_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
		Tối thiểu	$\left(\overline{x} - \varepsilon, +\infty\right)$	$\varepsilon = t_{1-\gamma}(n-1) \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
		Tối đa	$\left(-\infty; \overline{x} + \varepsilon\right)$	$\varepsilon = t_{1-\gamma}(n-1) \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

BÀI TẬP NHÓM

Đề bài: Điều tra năng suất lúa (tấn/ha) trên diện tích 90 hecta trồng lúa của một vùng, người ta thu được bảng số liệu sau:

Năng suất	**5,5**	**5,7**	**5,8**	**6,0**	**6,2**	**6,4**	**6,5**
Số hecta	**8**	**17**	**25**	**12**	**13**	**10**	**5**

Hãy ước lượng năng suất lúa trung bình ở vùng đó với độ tin cậy 97%?

XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN!